Geometría Analítica I

Tarea 6

Fecha de entrega: míercoles 17 de Mayo

- Considera la fórmula general de una reflexión $\varphi_{\mathcal{L}}$ en la recta

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} | n \cdot x = c\}$$

con $|n| = 1$ dada por

$$\varphi_{\mathcal{L}}(x) = x + 2(c - n \cdot x)n.$$

1. Demuestra que las reflexiones son isometrías.
2. Demuestra que si φ es una reflexión, entonces $\varphi^{-1} = \varphi$.
3. Demuestra que si $\varphi_{\mathcal{L}}$ es la reflexión en la recta $\mathcal{L}$, entonces $x \in \mathbb{R}^2$ es un punto fijo de $\varphi_{\mathcal{L}}$, i.e. $\varphi_{\mathcal{L}}(x) = x$, si y sólo si $x \in \mathcal{L}$.
4. Sean $f \in \mathfrak{O}(2)$ y $\mathcal{L}$ una recta como arriba. Demuestra que

$$f[\mathcal{L}] = \{f(x) | x \in \mathcal{L}\}$$

   es la recta dada por la ecuación $f(n) \cdot x = c$ (ojo: tienes que demostrar dos contenciones). Concluye que f manda al haz paralelo con dirección d en el haz paralelo con dirección $f(d)$.
5. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:
   1. La reflexión en la recta $\mathcal{L} = \{(x, y) | x + y = 1\}$.
   2. La rotación de $\pi/2$ en el punto $(-2, 3)$.
   3. La rotación de π en el punto $(4, 3)$.
   4. La reflexión en la recta $\mathcal{L} = \{(x, y) | y = 1\}$ seguida de la translación por $(2, 0)$.
6. Describe geométricamente (con palabras) las siguientes isometrías:
   1. $f(x, y) = (x + 1, -y)$
   2. $f(x, y) = (-x + 2, -y)$
   3. $f(x, y) = (-y, -x + 2)$
7. Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = (x+y, y-x)$ es una función lineal.
8. Exhibe una función lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que mande al eje X en la recta

$$\mathcal{L} = \{(x, y) | 2x - y = 0\}.$$

9. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

   calcula AB, $A(B + C)$, $(C - B)A$.
10. Exhibe matrices A y B de 2×2 tales que $AB \neq BA$. De tal manera que el producto de matrices no es conmutativo.

11. Exhibe matrices A y B de 2×2 tales que $AB = 0$, pero $A \neq 0$ y $B \neq 0$; donde 0 es la matriz cero (con todas sus entradas 0). (Piensa en términos de funciones.)
12. Sea C el cubo en $\mathbb{R}^3$ centrado en el origen, de lado 2 y con lados paralelos a los ejes coordenados; es decir, sus vértices son los ocho puntos cuyas tres coordenadas son 1 o -1. Describe el conjunto de matrices cuyas funciones lineales asociadas mandan al cubo en sí mismo. En particular, ¿cuántas son?
    - Considera las formulas de una rotación y una reflexión *por el origen* dadas por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ y } E_\phi = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

13. ¿Quiénes son $E_\alpha R_\beta$ y $R_\beta E_\alpha$?
14. Demuestra con matrices que $R_\beta E_\theta R_{-\beta} = E_\beta$.
15. Demuestra que la fórmula para la reflexión $\varphi_{\mathcal{L}}$ en la recta $\mathcal{L}$, coincide con la que nos da una matriz E_θ cuando la linea $\mathcal{L}$ pasa por el origen. Encuentra la relación entre n y θ.
16. Demuestra que la *matriz de Pitágoras*

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

    es ortogonal.