1 Problemas

1.1 Potências 1

Ex. 1.1 — Considere as matrizes

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculando $3B + C$ obtém-se:

□

$$3B + C = \begin{bmatrix} -11 & 8 & 8 \\ 4 & 0 & -6 \\ 13 & -1 & -4 \\ 8 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

□

$$3B + C = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 8 \\ 4 & -8 & -2 \\ 7 & 5 & -4 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

□

$$3B + C = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

□

$$3B + C = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 12 \\ 6 & -6 & -6 \\ 15 & 3 & -6 \\ 6 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

Ex. 1.2 — Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} 5\,y + 8\,y' + 4\,y'' = -2 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

Escolha de entre as opções dadas, a solução do problema dado

□

$$y = \frac{2}{5}\left(21\,\cos\left(\frac{1}{2}\,t\right) + 32\,\sin\left(\frac{1}{2}\,t\right)\right)e^{-t} - \frac{2}{5}$$

□

$$y = \frac{4}{5}\left(21\,\cos\left(\frac{1}{2}\,t\right) + 32\,\sin\left(\frac{1}{2}\,t\right)\right)e^{-t} - \frac{4}{5}$$

□

$$y = \frac{42}{5}\,\cos\left(\frac{1}{2}\,t\right) - \frac{2}{5}\,e^{t} + \frac{64}{5}\,\sin\left(\frac{1}{2}\,t\right)$$

□

$$y = \frac{42}{5}\,\cos\left(\frac{1}{2}\,t\right) - \frac{2}{5}\,e^{t} + \frac{64}{5}\,\sin\left(\frac{1}{2}\,t\right)$$

Ex. 1.3 — Complete, apresentando o resultado sob a forma de potência:

1. $(-5)^3 \times (-5)^4 =$_______;
2. $\frac{5^{-3}}{5^{-1}} =$_______;
3. $5^{-3} \times (-3)^{-3} =$_______;
4. $\frac{(-1)^4}{(-4)^4} =$_______;
5. $\left((-4)^{-3}\right)^4 =$_______.

Ex. 1.4 — Use as propriedades das potências e simplifique a seguinte expressão $\frac{x^2 \times x^3}{(-3x)^{-2}}$.

Ex. 1.5 — Use as propriedades das potências e simplifique a seguinte expressão $\frac{-3x^6 + 3x^2}{6x^2}$.

2 Soluções

Resposta do ex. 1.1 — $3B$ é uma matriz do mesmo tipo que a matriz B (4×3) e obtém-se multiplicando todos os elementos de B pela constante 3. Por outro, como $3B$ e C são matrizes do mesmo tipo, 4×3, é possível adicioná-las e $3B + C$ obtém-se adicionando os elementos correspondentes de $3B$ e C. Assim

$$3B{+}C = \left[\begin{array}{ccc} 3\times(-3)+(-2) & 3\times 2+2 & 3\times 2+2 \\ 3\times 1+1 & 3\times 1+(-3) & 3\times(-2)+0 \\ 3\times 4+1 & 3\times(-1)+2 & 3\times(-1)+(-1) \\ 3\times 3+1 & 3\times(-2)+(-1) & 3\times(-1)+(-2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -11 & 8 & 8 \\ 4 & 0 & -6 \\ 13 & -1 & -4 \\ 8 & -7 & -5 \end{array}\right].$$

Resposta do ex. 1.2 — Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial vem:

$$4\mathcal{L}\{y''\} + 8\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{-2\}$$

Atendendo às transformadas de Laplace das derivadas:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$$

obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - 8\,s + 2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - 8$$

Como a transformada de Laplace do 2º membro é$\mathcal{L}\{-2\} = -\dfrac{2}{s}$, efetuando os cálculos temos

$$(4\,s^2 + 8\,s + 5)\mathcal{L}\{y\} = 32\,s - \frac{2}{s} + 56 \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{32\,s - \frac{2}{s} + 56}{4\,s^2 + 8\,s + 5}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{32\,s^2 + 56\,s - 2}{s(4\,s^2 + 8\,s + 5)}$$

Vamos decompor esta fração em elementos simples. Observemos que $4\,s^2+8\,s+5$ não tem raízes reais, portanto a decomposição será da forma

$$\frac{32\,s^2 + 56\,s - 2}{s(4\,s^2 + 8\,s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{4\,s^2 + 8\,s + 5}$$

Recordando a decomposição em elementos simples estudada na determinação de primitivas, obtemos

$$\frac{32\,s^2 + 56\,s - 2}{s(4\,s^2 + 8\,s + 5)} = \frac{8\,(21\,s + 37)}{5\,(4\,s^2 + 8\,s + 5)} - \frac{2}{5\,s}$$

Para determinar a solução da equação diferencial basta calcular a inversa da transformada de Laplace

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8\,(21\,s + 37)}{5\,(4\,s^2 + 8\,s + 5)} - \frac{2}{5\,s}\right\}$$

Usando a lineariedade e observando que $4\,s^2 + 8\,s + 5 = (2\,s + 2)^2 + 1$, vem:

$$y = \frac{2}{5}\left(21\,\cos\left(\frac{1}{2}\,t\right) + 32\,\sin\left(\frac{1}{2}\,t\right)\right)e^{-t} - \frac{2}{5}$$

que é a solução do problema de valor inicial dado.

Resposta do ex. 1.3 — 1.$(-5)^3 \times (-5)^4 = (-5)^7$.

Uma vez que, $a^p \times a^q = a^{p+q}$, isto é, o produto de potências com a mesma base e diferentes expoentes é uma potência com a mesma base e expoente igual à soma dos expoentes dos fatores,

$$(-5)^3 \times (-5)^4 = (-5)^{3+4} = (-5)^7.$$

2. $\dfrac{5^{-3}}{5^{-1}} = 5^{-2}$.

Uma vez que, $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, isto é, o quociente de potências com a mesma base e diferentes expoentes é uma potência com a mesma base e expoente igual à diferença dos expoentes, obtém-se

$$\frac{5^{-3}}{5^{-1}} = 5^{(-3)-(-1)} = 5^{-2}.$$

3. $5^{-3} \times (-3)^{-3} = (-15)^{-3}$.

Como $a^p \times b^p = (a \times b)^p$, isto é, o produto de potências com a diferentes bases e o mesmo expoente é uma potência cuja base é o produto das bases dos fatores e o mesmo expoente, resulta

$$5^{-3} \times (-3)^{-3} = (5 \times (-3))^{-3} = (-15)^{-3}.$$

4. $\dfrac{(-1)^4}{(-4)^4} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^4$.

Uma vez que, $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$, isto é, o quociente de potências com o mesmo expoente é uma potência com o mesmo expoente e com base igual ao quociente das bases dos fatores, vem

$$\frac{(-1)^4}{(-4)^4} = \left(\frac{(-1)}{(-4)}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4.$$

5. $\left((-4)^{-3}\right)^4 = (-4)^{-12}$.

Como $(a^p)^q = a^{pq}$, vem

$$\left((-4)^{-3}\right)^4 = (-4)^{-3\times 4} = (-4)^{-12}.$$

Resposta do ex. 1.4 — Pretende-se simplificar a fração $\dfrac{x^2 \times x^3}{(-3x)^{-2}}$.

Como $a^p \times a^q = a^{p+q}$ vem

$$\frac{x^2 \times x^3}{(-3x)^{-2}} = \frac{x^{2+3}}{(-3)^{-2} \times x^{-2}} = \frac{x^5}{(-3)^{-2} \times x^{-2}}.$$

Uma vez que $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, resulta

$$\frac{x^5}{(-3)^{-2} \times x^{-2}} = \frac{x^{5-(-2)}}{(-3)^{-2}} = \frac{x^7}{\frac{1}{9}}.$$

Assim

$$\frac{x^2 \times x^3}{(-3x)^{-2}} = \frac{x^7}{\frac{1}{9}} = 9\,x^7.$$

Resposta do ex. 1.5 — Pretende-se simplificar a fração $\dfrac{-3x^6+3x^2}{6x^2}$.
Como $x^6 = x^{2+4} = x^2 \times x^4$ vem $-3x^6+3x^2 = -3x^2 \times x^4 + 3x^2 = x^2(-3x^4+3)$ e, consequentemente,

$$\frac{-3x^6+3x^2}{6x^2} = \frac{x^2(-3x^4+3)}{6x^2}.$$

Uma vez que $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, obtém-se

$$\frac{x^2(-3x^4+3)}{6x^2} = \frac{x^{2-2}(-3x^4+3)}{6} = \frac{x^0(-3x^4+3)}{6} = \frac{-3x^4+3}{6}.$$

Assim

$$\frac{-3x^6+3x^2}{6x^2} = \frac{-3x^4+3}{6}.$$