

# Теор. Вер.

## Практическое занятие 1

12 февраля 2021 г.

### 1 Сочетание

Сочетание – подмножество, содержащее  $k$  элементов, выбранном в множестве, содержащее  $n$  элементов ( $k < n$ ) Таким образом, сочетания различаются по составу, но не по порядку элементов.

Допустим, имеем подмножество:

$\{a, b, c\}$

Тогда мы можем взять следующие сочетания размеров  $k$ :

для  $k = 0$ :  $\emptyset$

для  $k = 1$ :  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

для  $k = 2$ :  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

для  $k = 3$ :  $\{a, b, c\}$

С использованием обозначений количества сочетаний, имеем:

$$C_3^0 = 0 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$

### 2 Перестановка

Перестановка – упорядоченный набор элементов множества. То есть перестановки одного множества не отличаются по составу, но отличаются по порядку.

Допустим, имеем то же подмножество:

$\{a, b, c\}$

Тогда можем построить следующие перестановки:

$\langle a, b, c \rangle$

$\langle a, c, b \rangle$

$\langle b, a, c \rangle$

$\langle b, c, a \rangle$

$\langle c, a, b \rangle$

$\langle c, b, a \rangle$

И с использованием обозначений можем вычислить количество:

$$P_3 = 3 * 2 * 1 = 3! = 6$$

### 3 Размещение

Размещение – это подмножество из  $k$  элементов, взятое в множестве из  $n$  элементов в определенном порядке. Таким образом, размещения различаются либо порядком элементов, либо составом элементов, либо и порядком, и составом

Возьмем вновь  $\{a, b, c\}$ .

Тогда для  $k = 0$ :  $\emptyset$

для  $k = 1$ :  $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle$

для  $k = 2$ :  $\langle ab \rangle, \langle ba \rangle$

$\langle ac \rangle, \langle ca \rangle$

$\langle bc \rangle, \langle cb \rangle$

для  $k = 3$ :  $\langle abc \rangle, \langle acb \rangle$

$\langle bac \rangle, \langle bca \rangle$

$\langle cab \rangle, \langle cba \rangle$

И, вводя обозначения, получаем:

$$A_3^0 = 1, \quad A_3^1 = 3, \quad A_3^2 = 6, \quad A_3^3 = 6$$

### 4 Формулы для сочетания, перестановок и размещения

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, 0 \leq k \leq n$$

$$P_n = n!$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 \leq k \leq n$$

Также можно отметить, что количество способов упорядочивания пустого множества равно  $0! = 1$ .

### 5 Бином Ньютона

Сама формула Бинома Ньютона:  $(a + b)^n = \sum C_n^k a^k b^{n-k}$

И так же с ней можно связать так называемый "Треугольник Паскаля" ( $n = 1 \dots 5$ ):

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \end{array}$$

1 4 6 4 1

При этом, можно отметить, что биномиальные коэффициенты являются симметричными, то есть:  $C_n^k = C_n^{n-k}$

Также мы можем организовать формулу разложения суммы:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = \sum_{k=0}^n C_n^k * 1^k * 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

## 6 Примеры

### 6.1 Пример 1

Имеем множество цифр:  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Вопрос: какое колво пятизначный чисел можно записать этими числами без повторений?

Можно отметить, что в качестве первой цифры нельзя использовать 0. То есть в итоге получаем:  $4 * 4 * 3 * 2 * 1 = 96$

### 6.2 Пример 2

Имеем те же цифры  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Вопрос: сколько четных (!) пятизначных чисел можно записать из этих цифр?

Потребуется рассмотреть два варианта: отдельно числа с 0 на конце, отдельно числа с 2, 4 на конце. Отдельно рассматривать ноль на последнем месте приходится, так как ноль не должен стоять на первом месте в вариантах с 2, 4 на конце.

Для чисел с 0 на конце получим следующее количество:

$$4 * 3 * 2 * 1 * 1$$

Для чисел с 2 или 4:

$$3 * 3 * 2 * 1 * 2$$

Полученное количество достаточно просуммировать, и получим ответ.

### 6.3 Пример 3

Задача: 7 девушек водят хоровод, сколькими способами они могут встать в круг?

Решение: подсчитать перестановки? Однако, важно не учитывать сдвиги, так как мы хоровод подразумевает круг!

В круге нет первого места, значит мы его можем построить относительно кого-то. Выберем одного участника, и расположим относительно него всех остальных, то есть 6 человек. Итого получаем перестановку из 6 "элементов":

$$P_6 = 6! = 720$$

### 6.4 Пример 4

Задача: имеем 7 различных бусинок, сколькими способами можно собрать ожерелье из всех бусинок?

так же задача? Нет. В отличии от хоровода, мы можем перевернуть "с ног на голову" ожерелье, и само ожерелье будет с тем же порядком бусинок (симметрия). То есть количество будет меньше в два раза:

$$\frac{P_6}{2} = 360$$

### 6.5 Пример 5

! (решение под вопросом, записал что было) !

Имеем: в коробке 6 белых шаров и 4 черных.

Задача: берем из коробки 4 шара. Сколькими способами можно достать 3 белых и 1 черный?

$$C_6^3 * C_4^1 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1*3*2*1} = \frac{6*5*4}{6} * 4 = 80$$

Так как:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^3 = C_n^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

### 6.6 Пример 6

Имеем: колода карт, 36 листов. Вопрос: сколькими способами мы можем вытащить четыре карты, среди которых две дамы, причем одна из них дама пик.

Решение. В колоде 36 часть, разделим ее на части: "дама пик" 3 других дамы "остальные 32". Из нее мы хотим взять набор: "дама пик" 1 дама "2 других карты".

дама пик	→	дама пик
3 других дамы	→	1 дама
остальные 32 карты	→	2 карты

Тогда, получаем выбор:

$$C_1^1 * C_3^1 * C_3^2 = 1 * 3 * \frac{32 * 31}{2} = 1488$$

## 6.7 Пример 7

Имеем: в буфете 4 сорта пироженных. Требуется: выбрать 7 штук пироженных, сколькими способами это можно сделать?

По сути, это сочетание с повторениями.

Обозначим пироженные, например, буквами {a,b,c,d}. Попробуем взять такой набор: {a, b, c, d \* 4}

Или такой: {a \* 2, b \* 0, c \* 2, d \* 3}

И много других вариантов. Но надо понять, что определяет этот выбор. По сути, мы можем так же сделать следующие интерпретации наших вариантов:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} * & * & * & **** \\ ** & & ** & *** \end{array} \right]$$

Границы с квадратными скобками мы передвигать не можем. Так же имеем 3 внутренних стенки, которые можем передвигать как угодно (в пределах внешних границ). Получается, колво всего элементов – 10 (7 пироженных и 3 стены). То есть в итоге, у нас получается следующее сочетание:

$$C_{10}^3 = C_{10}^7$$

$$C_{10}^3 = \frac{10 * 9 * 8}{6} = 120$$

Ответ: 120

## 6.8 Пример 8 (самостоятельно)

Сколькими способами можно разместить 7 белых шаров в 4 урнах?

По сути формулировка предыдущей задачи, если будет интересно порешать (не обязательно).

## 6.9 Пример 9 (самостоятельно)

Сколько неотрицательных целочисленных решений имеет уравнение:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Так же доп. формулировка задачи с пирожеными, если хочется попрактиковаться.

## 6.10 Отступление про проверки

Возможные проверки при заданиях:

- + – правильное решение
- + . – правильное решение с пометками
- ± – решение с некритическими ошибками

- ⊖ – решение с ошибками
- – серьезные ошибки
- – неправильное решение
- 0 – полный ноль

## 7 Возведение в степень суммы $k$ слагаемых

Помимо биннома Ньютона, нам очень может понадобиться такое действие, как возведение в степень  $k$  слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} * a_1^{n_1} * a_2^{n_2} * \dots * a_k^{n_k}$$

Так называемая полиномиальная формула.

### 7.1 Пример

Имеем отрезок  $[0, 10]$ .

Задача: поставить 5 точек так, чтобы 2 точки  $\in (0, 1)$  и 3 точки  $\in (0, 10)$ .

При этом пусть у каждой точки будет свой номер.

Иная формулировка: 5 шаров, 3 корзины. Сколькими способами можно распределить мячи так, чтобы 2 шара было в первой корзине, 3 в третьей, а центральная – пустая?

Ответ:

$$\frac{5!}{2! * 0! * 3!} = \frac{4 * 5}{2} = 10$$