

Projet Nénuphars



INTRODUCTION

Le but de ce projet est d'étudier et simuler la croissance de nénuphars sur un lac. Ce type de modèle est intéressant pour connaître par exemple l'évolution de plantes parasites dans un environnement. Notamment, il peut être utile de connaître la surface couverte par des nénuphars sur un lac afin de savoir quelle proportion d'eau peut avoir un échange d'oxygène avec l'air (ceci est important pour la respiration des poissons !).

Mots clés : simulation, géométrie.

Le principe du projet est d'étudier une question mathématique complexe de façon autonome et originale en utilisant l'outil informatique. **L'ensemble du projet est à faire par groupe de 3 étudiants.** Le projet est divisé en 2 sections : théorique et pratique. La première partie est **obligatoire**, la seconde partie correspond à des **pistes de travail**.

Rendu du projet :

- Un **rapport de mi projet** répondant aux questions de la Section 1.
- Un **exposé** présentant votre travail et vos résultats sur la Section 2 en fin de projet.

Le Rapport. .

Date de rendu : 29 mars à minuit.

Que faut-il faire ? Répondre aux questions de la Section 1.

Quel format ? Format PDF obligatoire. Si vous souhaitez ajouter des dessins, vous pouvez les scanner et les ajouter à votre document.

Nom du fichier : nenuphars_nom1_nom2_nom3.pdf

Qui réalise le rapport ? Un rapport par groupe de 3 étudiants.

A qui le rendre ? Envoyez par mail à viviane.pons@u-psud.fr, objet du mail "Rapport Projet nenuphars" et noms des étudiants dans le corps du mail.

L'exposé. .

Quand ? Les exposés auront lieu en fin de semestre, la date sera précisée ultérieurement.

Que doit-on présenter ? Vous devez présenter le travail effectué sur la Section 2 du projet, en particulier, les résultats que vous avez obtenus, les algorithmes que vous avez utilisés, les images ou vidéos produites, etc.

En combien de temps ? Vous aurez 10 minutes de présentation, puis 5 minutes de questions.

Sur quel support ? Vous aurez un vidéo projecteur et un ordinateur à disposition (ou le votre si vous le souhaitez). Vous pourrez donc présenter votre exposé sous forme d'un powerpoint ou pdf. Vous pouvez aussi montrer des images, vidéos, démos de code.

Qui parle ? Tout le monde ! Les 3 étudiants doivent participer.

Doit-on présenter notre code ? Vous pouvez utiliser un notebook SageMathCloud pour présenter des démos de code, cependant, nous ne notons pas la programmation mais bien les résultats obtenus !

Doit-on répondre aux questions ? Les questions de la Section 2 ne sont pas obligatoires, ce sont des pistes de travail, vous pouvez les suivre, ou pas...

1. PARTIE THÉORIQUE

1.1. Modèle avec croissance sans arrêt. Nous modéliserons les nénuphars par des cercles de centre C et de rayon R parfaitement circulaires. La croissance des nénuphars est simulée par l'évolution au cours du temps du rayon $R(t) = t$. À $t = 0$, le nénuphar est donc simplement un point correspondant à son centre.

Au cours de leurs croissances, on considère que les nénuphars peuvent se chevaucher comme représenté sur la figure 1. On observe également sur la figure 1 qu'à certain instant t , des "trous" peuvent se former, c'est à dire des espaces clos du lac entourés par des nénuphars.

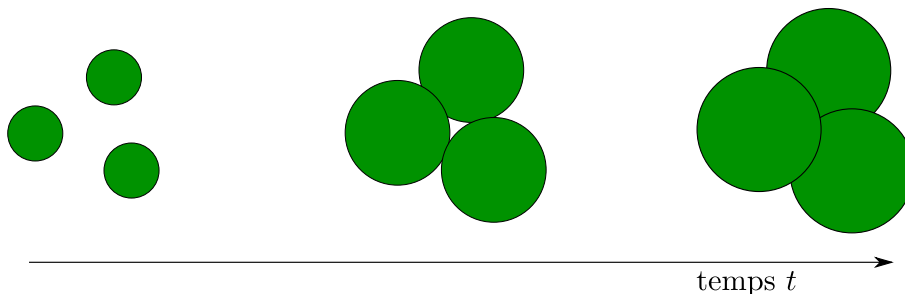


FIGURE 1. Évolution dans le temps de trois nénuphars.

Nous allons chercher à étudier l'évolution du nombre de *trous* au cours du temps. On définira u_n la suite indiquant le nombre de *trous*. Pour bien définir cette suite, elle devra avoir :

- son premier et dernier termes nuls,
- et deux termes consécutifs doivent toujours être différents.

1.2. Questions sur le modèle de "croissance sans arrêt".

- (1) Supposons que sur un lac L de forme arbitraire, nous avons un seul nénuphar. Qu'elle est le temps t_{min} minimal nécessaire pour que le nénuphar recouvre tout le lac ? On supposera qu'il peut s'étendre sur la terre bordant le lac.
- (2) Supposons maintenant que nous avons 2 nénuphars. Donner une borne supérieure de t_{min} . Cette borne peut-elle être atteinte et, si oui, dans quelle configuration ?

Supposons maintenant que le lac L est infiniment grand.

- (3) Quel est le nombre minimal de nénuphars pour qu'un *trou* puisse se former ? Sous quelle condition géométrique cela peut-il se produire (penser au centre du cercle circonscrit à un triangle) ? Formuler cette condition mathématiquement.
- (4) Étant donné la suite $u_n = \{0, 1, 3, 0\}$, quel est le nombre minimal de nénuphars initialement présents sur le lac pour que cette séquence soit réalisable ? Donner une configuration initiale conduisant à cette suite. Mêmes questions pour la suite $u_n = \{0, 1, 3, 0, 1, 0\}$.

- (5) Si on considère N nénuphars sur le lac. Quelles sont toutes les suites u_n possibles ?

1.3. Croissance de génération en génération. Considérons un nouveau modèle. Nous allons maintenant supposer que lorsque deux nénuphars se rencontrent, ils reviennent alors à leurs positions initiales (i.e. comme à $t = 0$). De plus, il apparaît au point de contact un nouveau nénuphar. Si deux rencontres ont lieu simultanément, on considérera que deux nénuphars sont créés.

On introduit la suite v_n indiquant le nombre de nénuphars après la création du (ou des) n ème individus (si plusieurs sont créés simultanément).

1.4. Questions sur le modèle "croissance de génération en génération".

- (1) Considérons pour commencer une population de deux nénuphars à $t = 0$. Comment va évoluer cette population au cours du temps ? Donner la suite v_n . Quelle figure observera t'on avec les centres des nénuphars quand $t \rightarrow +\infty$?
- (2) Poussons l'étude plus loin et considérons cette fois trois nénuphars initialement présents. Que se passe t'il s'ils sont alignés ? S'ils ne sont pas alignés, délimiter une zone dans laquelle la population de nénuphars sera restreinte. Généraliser au cas de N nénuphars.

2. MODÉLISATION ET EXTENSIONS

Le but de cette partie sera à la fois de simuler l'évolution des nénuphars au cours du temps et d'approfondir notre étude à l'aide de l'outil numérique. On s'appuiera pour cela sur le logiciel sage. Nous proposons ici quelques pistes d'études que vous pouvez compléter avec de nouvelles si vous le souhaitez.

2.1. Étude du modèle "croissance sans arrêt".

- (1) Étant donnée une configuration initiale de N nénuphars sur un lac (modélisé par tout le plan), écrire un programme permettant d'afficher à un instant t les nénuphars. Créer à partir de ce programme une animation en temps permettant de voir les nénuphars grandir.
- (2) Proposer un algorithme permettant de connaître le nombre de *trous* présent à un instant t . Écrire un programme permettant de calculer et d'afficher la suite u_n en fonction d'une configuration initiale.
- (3) Essayons de faire le processus inverse. Étant donnée une suite u_n , proposer un algorithme permettant de trouver une configuration initiale conduisant à cette suite.

2.2. Étude du modèle "croissance de génération en génération".

- (1) Étant donnée un configuration initiale de N nénuphars, écrire un programme permettant d'afficher au cours du temps la position des centres des nénuphars (marqué par exemple par un point).
- (2) Faire le tracer de la suite v_n à l'aide du simulateur précédent.
- (3) Considérons que le lac n'est plus infini et que lorsqu'un nénuphar touche son bord, il disparaît. Écrire un programme permettant de simuler l'évolution d'une population de nénuphars au cours du temps. Tester une situation avec une île dans le lac.

2.3. Autres pistes !

- (1) Essayer de prendre un autre modèle de croissance des nénuphars, par exemple $R(t) = R_{max}(1 - e^{-t})$ avec $R_{max} > 0$. Dans ce modèle, les nénuphars ne grandissent pas indéfiniment.
- (2) Prendre en compte un temps de vie des nénuphars.
- (3) Changer la forme des nénuphars.