Geometría Analítica II

Tarea 2

Fecha de entrega: miércoles 30 de Agosto

1. Encuentra la matriz B de una rotación que diagonalize las siguientes matrices simétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

   Cálcula $B^T AB$, donde A es una de las anteriores y B la rotación correspondiente.

2. Describe geométricamente (da centro, dirección de los ejes y parámetros o ecuación canónica correspondiente) una elipse, una hipérbola y una parábola dentro de las curvas cuadráticas definidas por los polinomios siguientes.
   - $-6x^2 + 24xy + y^2 - 12x - 26y - 161$
   - $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 58x + 24y + 59$
   - $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 1$
   - $47x^2 + 32xy - 13y^2 - 252x - 12y + 247$
   - $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 14x - 34y - 37$
   - $66x^2 - 24xy + 59y^2 - 108x - 94y + 1$
   - $13x^2 + 10xy + 13y^2 + 42x - 6y - 27$
   - $9x^2 + 6xy + 17y^2 + 12x - 28y - 52$
   - $-7x^2 - 12xy + 2y^2 + 40x + 20y - 55$
   - $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 130x - 90y + 175$
   - $18x^2 + 48xy + 32y^2 - 29x + 3y - 22$
   - $32x^2 + 48xy + 18y^2 + 31x - 8y - 88$
   - $-7x^2 + 48xy + 7y^2 + 158x - 6y - 88$
   - $-24x^2 - 14xy + 24y^2 + 152x - 164y + 151$
   - $7x^2 + 48xy - 7y^2 + 116x - 138y - 348$

3. Encuentra un polinomio que defina a las siguientes curvas cuadráticas:
   1. La elipse con semieje mayor 3 en la dirección (3, 4), semieje menor 2 y centro en (-1, 2).
   2. La hiperbóla con semieje principal 4 en la dirección (2, 1), semieje secundario 1 y centro en (2, 3).
   3. La parábola con vértice en (1, 3) directriz en la dirección (1, 4) y distancia focal 1.

4. ¿Cuál es la matriz de una homotesia que lleve a la parábola dada por $x^2 + ay$, con $a \neq 0$, en la canónica (dada por $x^2 - y$)? Concluye que hay sólo una clase de parábolas módulo semejanzas.

5. Demuestra que el conjunto de afinidades que dejan invariante a un polinomio cuadrático P,

$$\mathrm{Sim}_{Af}(P) = \{g \in \mathrm{Af}(2) | P \circ g = P\}$$

es un grupo.

6. Para $P(x) = x \cdot x - 1$ demuestra algebráicamente que $\mathrm{Sim}_{Af}(P) = \mathrm{O}(2)$.

7. Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola canónica dada por la ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Demuestra que para cualquier $(a, b) \in \mathcal{H}$ se tiene que la transformación lineal definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

deja invariante a (es una simetría afín de) $\mathcal{H}$.

8. Demuestra que si $g \in Af(2)$ es tal que $g(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ (con $\mathcal{H}$ la hipérbola canónica) entonces g es lineal y está dada por una matriz como la anterior, o bien por esa seguida de la reflexión en el eje-X.