

# Arbres, arithmétique, surfaces plates

Samuel Lelièvre

2015-07-18

## Résumé

Cet article étudie des liens entre surfaces plates, groupes fuchsien, algorithmes de pgcd et de fractions continues pour des ordres dans des corps de nombres, énumération de groupes fuchsien et de sous-monoides de ces groupes, énumération d'orbites d'un vecteur du plan sous l'action linéaire d'un groupe fuchsien, structures d'arbres analogues à l'arbre de Farey ou de Stern-Brocot.

On présente des pistes de généralisation à d'autres corps de nombres, ordres algébriques, surfaces plates.

## 1 Introduction

## 2 Contexte et rappels

## 3 Les entiers d'or et le L d'or

### 3.1 Le nombre d'or, les entiers d'or, les rationnels d'or

Le *nombre d'or*, noté ici  $\varphi$ , est la racine positive du polynôme  $x^2 - x - 1$ . Il vaut  $(1 + \sqrt{5})/2$ , soit 1.61803... C'est un entier algébrique de degré deux. Le corps quadratique associé,  $K_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\varphi)$ , a pour anneau des entiers l'anneau  $O_5 = \mathbb{Z}[\varphi]$ , également appelé ordre quadratique de discriminant 5. Appelons *entiers d'or* les éléments de  $O_5$  et *rationnels d'or* les éléments de  $K_5$ .

### 3.2 Le L d'or et ses diagonales

Appelons « L d'or » et notons  $L_5$  la surface de translation obtenue à partir d'un polygone en L épaissi, à branches d'épaisseur 1 et de longueur  $\varphi$ , dont on recolle par translation les portions de côtés parallèles se faisant face (voir figure 1). Le L d'or est dans la même orbite sous l'action de  $GL(2, \mathbb{R})$  que le « double pentagone », surface formée de deux pentagones réguliers images miroir l'un de l'autre dont on identifie par translation les paires de côtés parallèles.

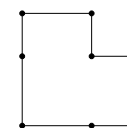


FIGURE 1 – Le L d'or, surface de translation à coordonnées dans les entiers d'or.

Le L d'or est naturellement muni d'une métrique plate qui possède une singularité conique où il y a un excès d'angle de deux tours. Une autre façon de voir le L d'or est comme une courbe algébrique complexe munie d'une 1-forme holomorphe possédant un zéro double. Les cartes plates sont les coordonnées naturelles de la 1-forme, et la singularité conique correspond au zéro de la 1-forme.

Appelons *diagonales* du L d'or les segments géodésiques (pour la métrique plate sur le L d'or) allant du zéro de la 1-forme à lui-même, et dont l'intérieur ne passe pas par ce point. On représente à la figure 2 quelques diagonales du L d'or.

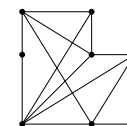


FIGURE 2 – Quelques diagonales sur le L d'or.

Compte tenu de la structure de translation du L d'or, on peut développer dans le plan ces diagonales pour obtenir un ensemble discret de vecteurs du plan. Une portion de cet ensemble est représentée à la figure 3.



FIGURE 3 – Vecteurs des diagonales du L d’or à coordonnées  $\leq 2$ .

### 3.3 Action de $SL(2, \mathbb{R})$ , groupe triangulaire $(2, 5, \infty)$

Le stabilisateur  $\Gamma$  de cette surface pour l’action naturelle de  $SL(2, \mathbb{R})$  sur les surfaces de translation est le sous-groupe de  $SL(2, \mathbb{R})$  engendré par les matrices  $\begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . C’est le groupe triangulaire  $(2, 5, \infty)$ , également appelé cinquième groupe de Hecke. C’est un groupe fuchsien non cocompact, de covolume fini, qui contient la matrice moins l’identité, et qui possède une unique pointe (classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques maximaux). Le projectivisé  $PG$  de  $\Gamma$ , son quotient par le sous-groupe normal  $\{I, -I\}$ , est produit libre d’un groupe cyclique d’ordre 2 par un groupe cyclique d’ordre 5. Notons que la structure de  $\Gamma$  est très proche de celle de  $SL(2, \mathbb{Z})$  qui est le groupe triangulaire  $(2, 3, \infty)$  ou troisième groupe de Hecke.

Identifions  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$  de la façon habituelle et notons  $C = C^+$  le cône positif engendré par  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \varphi \\ 1 \end{bmatrix}$ . Soit  $\Lambda$  l’ensemble des vecteurs des diagonales longues du L d’or, et  $\Lambda^+$  son intersection avec  $C$ . Les symétries de réflexion du L d’or, notamment celle d’axe horizontal et celle d’axe vertical, se retrouvent pour  $\Lambda$ , qui s’obtient de  $\Lambda^+$  en appliquant les symétries par rapport aux axes de coordonnées.

Nous allons décrire une structure arborescente pour  $\Lambda^+$ , et une structure arborescente pour le sous-monoïde  $\Gamma^+$  de  $\Gamma$  formé des matrices à entrées non-négatives. Le monoïde  $\Gamma^+$  est un monoïde libre engendré par  $\begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \varphi & \varphi \\ 1 & \varphi \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & \varphi \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Dans l’arbre du L d’or, on part de la famille  $(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ 1 \end{bmatrix})$ , et à chaque étape on insère, entre chaque paire de vecteurs consécutifs de la liste, trois combinaisons linéaires des vecteurs de la paire, de coefficients  $\begin{bmatrix} \varphi \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi \end{bmatrix}$ .

Autrement dit, la racine de l’arbre est  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , ses quatre enfants sont  $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\sigma_1 = \begin{bmatrix} \varphi & \varphi \\ 1 & \varphi \end{bmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & \varphi \end{bmatrix}$ , et  $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; et chaque noeud  $M$  a pour enfants les  $\sigma_i M$  pour  $i = 0 \dots 3$ .

### 3.4 Pentas des diagonales du L d’or

On note ici  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\varphi)$ .

L’ensemble des pentes des diagonales du L d’or est  $K \cup \{\infty\}$ . Voir [1].

On dit aussi que le corps des pentes est  $K$ .

Pour les surfaces de translation usuelles (connexes, compactes, sans bord), quatre corps coïncident : le corps de trace, le corps des pentes, le corps des birapports, et le corps des segments. Voir [4] pour une discussion dans le cas des surfaces de translation de type infini.

L’énumération des diagonales du L d’or fournit donc en corollaire une énumération des rationnels d’or, c’est-à-dire de  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

Cette énumération est semblable à l’énumération des rationnels par suites de Farey, ou arbre de Stern-Brocot.

### 3.5 Algorithme de pgcd pour les entiers d’or

Considérons à nouveau l’algorithme d’énumération des diagonales du L d’or. Considérons le cône  $C$  formé des vecteurs  $(x, y)$  avec  $x > 0$  et  $y \geq 0$  (quart de plan positif avec une partie de son bord).

Le cône  $C$  est partitionné en ses images par les matrices  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , qu’on appellera secteurs  $C_0, C_1, C_2, C_3$ .

Tout vecteur de  $C$  à coordonnées dans  $K$  appartient à exactement un des  $C_i$ , et on peut donc lui appliquer l’application  $\alpha_i = \sigma_i^{-1}$ . Notons  $\alpha$  l’application qui consiste à appliquer dans chaque  $C_i$  l’application  $\alpha_i$ .

Notons que les vecteurs horizontaux sont fixés par  $\alpha$  et que ce sont les seuls.

Un algorithme de pgcd pour les entiers d’or se déduit de ces observations. Partons en effet de deux entiers d’or positifs  $a$  et  $b$ , et formons le vecteur  $(a, b)$ , qui est donc dans  $C$ . Notons  $(a_1, b_1) = \alpha(a, b)$ . En étudiant les quatre cas possibles, selon le sous-cône  $C_i$  qui contient  $(a, b)$ , on voit que le pgcd de  $a_1$  et  $b_1$  est le même que celui de  $a$  et  $b$ . En itérant, on finit par obtenir un vecteur horizontal  $(a_n, b_n)$  avec  $b_n = 0$ . Le pgcd vaut alors  $a_n$ .

Notons que le pgcd est défini à multiplication près par une unité de  $O_5$ .

**Théorème 1.** *La fonction récursive gcd ci-dessous renvoie le pgcd de deux entiers d’or.*

Fonction  $\text{gcd}(a, b)$  :

1. si  $a < 0$  ou  $b < 0$  : renvoyer  $\text{gcd}(|a|, |b|)$
2. si  $a < b$  : renvoyer  $\text{gcd}(b, a)$
3. si  $b = 0$  ou  $b = a$  ou  $\varphi b = a$  : renvoyer  $a$
4. si  $\varphi b < a$  : renvoyer  $\text{gcd}(a - \varphi b, b)$
5. (cas  $b < a < \varphi b$ ) renvoyer  $\text{gcd}(\varphi a - \varphi b, \varphi b - a)$

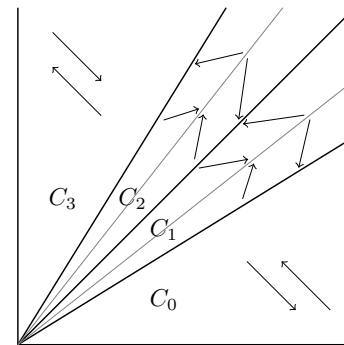


FIGURE 4 – Contractions et dilatations.

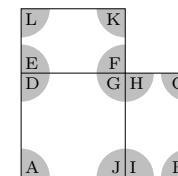


FIGURE 5 – Douze angles droits du L d’or.

## Références

- [1] Pierre Arnoux, Thomas A. Schmidt.

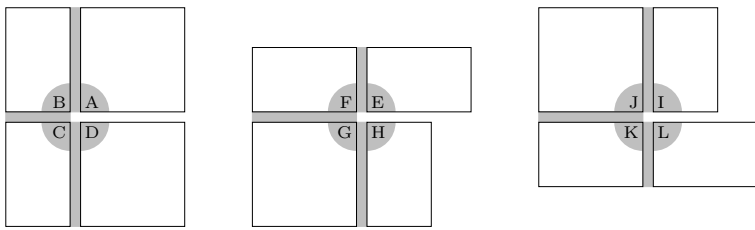


FIGURE 6 – Morceaux du L d’or autour de l’origine d’un revêtement triple du plan.

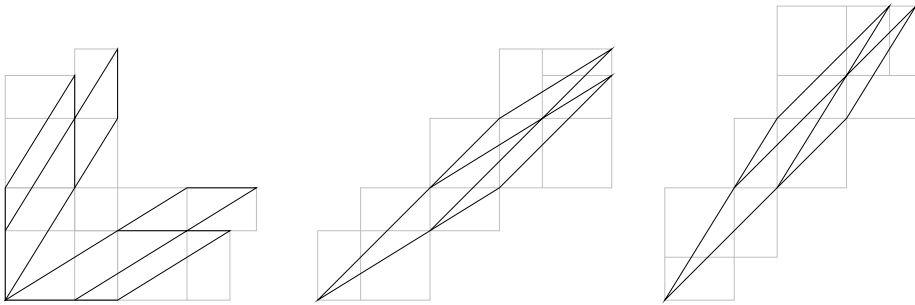


FIGURE 7 – Effet des contractions sur le L d’or.

- [2] Jayadev Athreya, Jonathan Chaika, Samuel Lelièvre.
- [3] Diana Davis, Dmitri Fuchs, Serge Tabachnikov.
- [4] Piotr Przytycki, Gabriela Weitze-Schmithüsen, Ferrán Valdez.
- [5] John Smillie, Corinna Ulcigrai.
- [6] Caglar Uyanik, Grace Work.
- [7] William A. Veech.
- [8] Yaroslav B. Vorobets.