Geometría Analitica I

Tarea 1

Fecha de entrega: miércoles 15 de Febrero

1. Dá dos demostraciones del teorema de Pitágoras distintas a la que aparece en el libro.
2. En clase encontramos las coordenadas de los vértices del cuadrado en $\mathbb{R}^2$ de lado 2 con lados paralelos a los ejes, centrado en el origen. Encuentra las coordenadas de los vértices del octágono regular tal que cuatro son los vértices del cuadrado anterior.
3. Da un ejemplo de un espacio vectorial distinto de $\mathbb{R}^n$, justifica tu respuesta.
4. Sean $v1 = (2, 3)$, $v2 = (-1, 2)$, $v3 = (3, -1)$ y $v4 = (1, -4)$.
   1. Calcula y dibuja: $2v1 - 3v2$; $2(v3 - v4) - v3 + 2v4$; $2v1 - 3v3 + 2v4$.
   2. ¿Qué vector $x \in \mathbb{R}^2$ cumple que $2v1 + x = 3v2$; $3v3 - 2x = v4 + x$?
   3. ¿Puedes encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $rv2 + sv3 = v4$?
5. Demuestra que si $x \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}$ son tales que $tx = 0$ entonces $t = 0$ ó $x = 0$. ¿Y para $\mathbb{R}^n$?
6. Demuestra que si $x \in \mathbb{R}^n$ es distinto de 0, y $t, s \in \mathbb{R}$ son tales que $tx = sx$, entonces $t = s$.
7. Exhibe representaciones paramétricas para las 3 rectas que genera el triángulo en $\mathbb{R}^3$ dado por los puntos $q1 = (2, 1, 2)$, $q2 = (-1, 1, -1)$ y $q3 = (-1, -2, -1)$.
8. Si tienes una barra rígida de un metro y con una fuerza de 10kg quieres levantar una masa de 40kg, ¿de dónde debes de colgar la masa, estando el punto de apoyo al extremo de tu barra? Haz un dibujo.
9. Considera tres puntos a, b y c no colineales, y sean α, β y γ las correspondientes coordenadas baricéntricas del plano que generan. Observa que cuando una de las coordenadas baricéntricas es cero entonces el punto correspondiente está en una de las tres rectas por a, b y c, ¿en cuál?, ¿puedes demostrarlo? Haz un dibujo de los tres puntos y sus tres rectas. Estas parten al plano en pedazos (¿cuántos?), en cada uno de ellos escribe los signos que toman las coordenadas baricéntricas (por ejemplo, en el interior del triángulo se tiene $(+, +, +)$ correspondiendo respectivamente a (α, β, γ)).
10. Demuestra que si u y v son linealmente independientes, entonces la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(s, t) = su + tv$ es inyectiva.
11. Demuestra que cualquier plano está en biyección con $\mathbb{R}^2$.

12. Demuestra que tres puntos a, b, c son no colineales si y sólo si los vectores $u = (b - a)$ y $v = (c - a)$ son linealmente independientes.

13. Dá una expresión paramétrica para el plano que pasa por los puntos $a = (0, 1, 2)$, $b = (1, 1, 0)$ y $c = (-1, 0, 2)$.

14. Demuestra que

$$w \in \langle u, v \rangle \iff w + \langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle \iff \langle u, v, w \rangle = \langle u, v \rangle.$$