Ответ на вопрос по лекции

Вопрос

Вопрос по слайду 20 "Геометрическое броуновское движение" про переход от выражения

$$S(t) = S_0 e^{\mu t} \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \tag{1.1}$$

к выражению

$$E\left[S(t)\right] = S_0 e^{\mu t} \tag{1.2}$$

Почему при вычислении мат ожидания слагаемые в показателе экспоненты μt и $-\frac{1}{2}\sigma^2 t$ сгруппированы в разных сомножителях и дают разный вклад в результат?

Ответ

Так как $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, то $E\left[W_t\right] = 0$. Для $\sigma W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ и мат ожидание так же равно $0: \ E\left[\sigma W_t\right] = 0$

Но(!) $E\left[exp(\sigma W_t)\right] \neq exp(0)$
А мат ожидание последнего множителя в правой части (1.1) как раз равно 1, именно по этому слагаемые сгруппированы таким образом.

Есть несколько способов проверить верность утверждения

$$E\left[\exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\right] = 1 \tag{1.3}$$

Способ 1

Используя формулу из справочника (например см. wikipedia) для мат ожидания лог-нормального распределения $X = exp(Z)$, где $Z \sim \mathcal{N}(\mu_{GBM}, \sigma_{GBM})$.

$$E\left[X\right] = exp(\mu_{GBM} + \frac{1}{2}\sigma_{GBM}^2)$$

Для (1.3) имеем:

$$\mu_{GBM} = -\frac{1}{2}\sigma^2 t$$

$$\sigma_{GBM} = \sigma\sqrt{t}$$

Способ 2

По определению мат ожидания:

$$E\left[\exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\sigma\sqrt{t}z - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{z^2}{2})dz =$$

собрав слагаемые в аргументе экспоненты получаем

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(z-\sigma\sqrt{t})^2}{2})dz =$$

произведя замену переменных $x = z - \sigma\sqrt{t}$, получаем интеграл от плотности нормального распределения

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x^2}{2})dx = 1$$