Álgebra superior I

Tarea 4

Entrega: Martes 20 de Septiembre

1. Encuentre un ejemplo de una relación R tal que:

$$R^{-1} = \mathrm{im}(R) \times \mathrm{dom}(R).$$

2. Encuentre un ejemplo de una relación R tal que:

$$R^{-1} \neq \mathrm{im}(R) \times \mathrm{dom}(R).$$

Considérense los siguientes conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6, 16\},$$

$$D = \{2, 3, 8, 10\}, E = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

Defínanse las siguientes relaciones:

$$R \subset A \times B \text{ tal que } (x, y) \in R \text{ si y sólo si } x + y \leq 5;$$

$$S \subset A \times C \text{ tal que } (x, y) \in S \text{ si y sólo si } y = x^2;$$

$$T \subset C \times D \text{ tal que } (x, y) \in T \text{ si y sólo si } y = x/2;$$

$$P \subset E^2 \text{ tal que } (x, y) \in P \text{ si y sólo si } 3 \text{ divide a } x + y.$$

3. Determine las relaciones R, S, T y P, nombrando todos sus elementos.

4. Determine los dominios, imagenes y rangos de las cuatro relaciones.

5. Determine R^{-1} y P^{-1}, nombrando todos sus elementos.

6. Determine $R^{-1} \circ P^{-1}$, nombrando todos sus elementos.

7. Clasifique a las relaciones R, S y T en términos de si son simétricas, antisimétricas y/o transitivas, justificando sus respuestas.

8. Clasifique a P en términos de si es reflexiva sobre E, antirreflexiva sobre E, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, justificando sus respuestas.

9. En cada inciso determine si la relación Q es reflexiva sobre A, antirreflexiva sobre A, simétrica, antisimétricay/o transitiva, justificando sus respuestas.

(a) $Q = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$.

(b) $Q = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

(c) $Q = \{(1,3),(1,1),(3,1),(1,2),(3,3),(4,4)\}$.

(d) $Q = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

(e) $Q = \{(1,3),(4,2),(2,4),(3,1),(2,2)\}$.

10. Para $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros; definimos las relaciones R y S sobre $\mathbb{Z}^2$; es decir, $R \subset \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ y $S \subset \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$. Determine si son reflexivas sobre $\mathbb{Z}^2$, antirreflexivas sobre $\mathbb{Z}^2$, simétricas, antisimétricas y/o transitivas, justificando sus respuestas.

    (a) $(a,b)S(a',b')$ si y sólo si $ab' = ba'$.

    (b) $(a,b)R(c,d)$ si y sólo si $a = c$.

11. Sean R y S relaciones sobre un conjunto cualquiera A ($A \neq \emptyset$). Las siguientes afirmaciones no siempre son ciertas. Encuentre contraejemplos, justficándolos.

    (a) Si $R \cup S$ es reflexiva sobre A, entonces R y S son reflexivas sobre A.

    (b) R es transitiva si y sólo si $R \subset R \circ R$.

    (c) Si R y S son transitivas, entonces la relación $R \cup S$ es transitiva.

    (d) Si R y S son antisimétricas, entonces la relación $R \cup S$ es antisimétrica.

    (e) Si $R \cap S$ es transitiva, entonces R y S son transitivas.

    (f) Si $R \cap S$ es antisimétrica, entonces R y S son antisimétricas.

12. Si es posible, en cada inciso dé un ejemplo de una relación R definida sobre un conjunto A ($A \neq \emptyset$) de forma que cumpla lo siguiente, y si no es posible, justifique por qué no lo es.

    (a) R sea reflexiva sobre A y simétrica, pero no transitiva.

    (b) R sea reflexiva sobre A y transitiva, pero no simétrica.

    (c) R sea simétrica y transitiva, pero no reflexiva sobre A.

    (d) R sea reflexiva sobre A, pero no simétrica ni transitiva.

    (e) R sea simétrica, pero no reflexiva sobre A ni transitiva.

    (f) R sea transitiva, pero no reflexiva sobre A ni simétrica.

    (g) R sea reflexiva sobre A y antisimétrica.

    (h) R sea antisimétrica y no sea reflexiva sobre A.

    (i) R sea reflexiva sobre A, antisimétrica y transitiva.

    (j) R sea antirreflexiva sobre A y transitiva.

13. Describa las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia siguientes y la partición de A inducida por dichas relaciones.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

(b) $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

(c) $A = \mathbb{N}$, y aRb si y sólo si $a + b$ es par.

(d) $A = \mathbb{Z}$, y $(a, b) \in R$ si y sólo si $a^2 + a = b^2 + b$.

(e) $A = \mathbb{Z}^2$ (es decir, $R \subset \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$) y $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a = c$.

14. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando a detalle su respuesta.

    (a) Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A, entonces $R \cup S$ es una relación de equivalencia sobre A.

    (b) Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A, entonces $R \cap S$ es una relación de equivalencia sobre A.

    (c) Si R y S son relaciones definidas sobre un conjunto no vacío A tales que $R \cup S$ es relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R como S son relaciones de equivalencia sobre A.

    (d) Si R y S son relaciones definidas sobre un conjunto no vacío A tales que $R \cap S$ es relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R como S son relaciones de equivalencia sobre A.

15. Diga si las siguientes son particiones de los conjuntos dados y si sí lo son, diga cuáles son las relaciones de equivalencia inducidas, justificando bien sus respuestas:

    (a) Dado el conjunto $\mathbb{Z}$, sea

$$\begin{aligned} P &= \{\{n \in \mathbb{Z} | \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m)\}, \\ &\quad \{n \in \mathbb{Z} | \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m + 1)\}, \\ &\quad \{n \in \mathbb{Z} | \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m + 2)\}\}. \end{aligned}$$

    (b) Dado el conjunto $\mathbb{Z}$, sea

$$P = \{\{n \in \mathbb{Z} | n \leq 0\}, \{n \in \mathbb{Z} | n > 1\}\}.$$

    (c) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea

$$P = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{6\}\}.$$

    (d) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea

$$P = \{\{1, 2\}, \{5\}, \{3, 4, 6\}\}.$$

    (e) Dado el conjunto $\mathbb{R}$, sea

$$\begin{aligned} P &= \{\{x \in \mathbb{R} | x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional}\}, \\ &\quad \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\}, \\ &\quad \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, \\ &\quad \{x \in \mathbb{R} | x \text{ es irracional } \wedge \text{ x es racional}\}\}. \end{aligned}$$

(f) Dado el conjunto $\mathbb{R}$, sea

$$
\begin{aligned}
P \quad = \quad & \{\{x \in \mathbb{R} | x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional}\}, \\
& \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\}, \\
& \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}\}.
\end{aligned}
$$