Geometría Analítica II

Tarea 7

Fecha de entrega: lunes 11 de Diciembre

1. Demuestra que para $\mathbb{P}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la transformación
$$\begin{array}{cccc} \mu\colon & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & x & \longmapsto & \frac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$
no es biyectiva, cuando $ad - bc = 0$

2. Encuentra el punto en que se cortan las rectas proyectivas:
   - $\mathcal{L}_1 : 3x - y + z = 0$ y
   - $\mathcal{L}_2 : -x - 2y + 2z = 0$.

3. Cuáles de las ecuaciones siguientes definen un lugar geométrico en $\mathbb{P}^2$
   1. $3x^2 + xy - z^2 = 0$;
   2. $-x^3 - y^2 + x + z = 0$;
   3. $x^4 + y^4 - z^4 = 0$;
   4. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

   justifica tu respuesta.

3. Encuentra los representantes de $(-2 : 6 : -4)$ con la característica que se indica:
   1. $x = 1$;
   2. $z = 1$;
   3. $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$.

4. Demuestra que tres puntos proyectivos pertenecen a la misma recta proyectiva, si y sólo si el determinante de las coordenadas de sus representantes se anula.

5. Demuestra que si a cuatro puntos O, H, V y U en posición general, es decir, tales que ninguna terna sea colineal, se les asigna las coordenadas $O(0 : 0 : 1); H(1 : 0 : 1); V(0 : 1 : 1); U(1 : 1 : 1)$; eso determina coordenadas para todos los demás puntos de $\mathbb{P}^2$.

6. Define $\mathbb{P}^3$ y caracteriza las rectas proyectivas y los planos proyectivos en este espacio proyectivo.

7. Justifica la afirmación siguiente: En $\mathbb{P}^3$, un tetraedro es autodual.

8. Comprueba que $\mathbb{S}^2$ es orientable, por alguno de los métodos siguientes:

   a) Triangula la esfera, y comprueba que es posible orientar los triángulos de forma que los lados comunes queden recorridos en sentidos opuestos.

b) Calcula el gradiente de la función $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y comprueba que en cualquier punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$, se tiene $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$. El hecho de que $\nabla F(x,y,z)$ varíe continuamente con el punto $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$ implica que pueden definirse orientaciones compatibles para curvas que rodean puntos cercanos.

9. Marca los lados horizontales de un cuadrado con flechas que apunten a la derecha, y los lados verticales con flechas que apunten una hacia abajo y otra hacia arriba. Pega primero los lados horizontales haciendo coincidir las flechas ¿qué obtienes?, y explica por qué no puede realizar en $\mathbb{R}^3$ el pegado que falta haciendo coincidir las flechas verticales. El objeto resultante de esa identificación en los lados de un cuadrado se llama **Botella de Klein**, que es una superficie no orientable.

10. Rota la circunferencia del plano $YZ \subset \mathbb{R}^3$ con centro en $(0,2,0)$ y radio 1 en torno al eje Z. Demuestra que el toro de revolución T así obtenido es invariante bajo la aplicación antípoda, y que al identificar los puntos antípodas de T, resulta también una Botella de Klein.

11. Demuestra la inyectividad de la función $F\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x:y:z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

12. Demuestra que una perspectividad es una involución (i.e., es su propia inversa).

13. Encuentra la recta transformada de $2x - y + 4z = 0$ bajo la proyectividad dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$