TD5 : Arbres

Exercice 1 (Arbres).
On utilisera la structure suivante pour les arbres :

```
Structure Arbre :
    valeur, un entier
    nbFils, un entier
    Fils, un tableau de taille nbFils contenant des Arbres
```

(1) Donnez un algorithme calculant le nombre d'éléments dans l'arbre.
(2) Donnez un algorithme calculant la valeur maximale de l'arbre.
(3) Donnez un algorithme donnant la somme des valeurs de l'arbre.
(4) Donnez un algorithme calculant la distance minimale entre une feuille et la racine.
(5) Donnez un algorithme calculant le nombre de fils maximal des nœud de l'arbre.

Exercice 2 (Arbres binaires).
On utilisera la structure suivante pour les arbres binaires :

```
Structure ArbreBinaire :
    valeur, un entier
    filsGauche, un ArbreBinaire
    filsDroit, un ArbreBinaire
```

Si l'un des fils est vide, on supposera que la valeur filsGauche (ou filsDroit) est égale à `None` (de façon équivalente on pourrait supposer que filsGauche et filsDroit sont des pointeurs en C et dans ce cas, l'arbre vide serait un pointeur NULL).

(1) Donnez un algorithme de parcours préfixe.
(2) Donnez un algorithme de parcours en largeur.
(3) Donnez un algorithme testant si deux arbres binaires sont égaux (même forme et même valeurs)

Exercice 3 (Structure Fils-Frère).

(1) Dessinez toutes les formes d'arbres binaires possible à 1 nœud, 2 nœuds et 3 nœuds.
(2) Même question pour les arbres généraux à 2 nœuds, 3 nœuds et 4 nœuds. Que remarquez-vous ?
(3) Á partir de la phrase "Dans un arbre, chaque nœud possède un premier fils et un premier frère (éventuellement vides)" imaginez une structure de représentation des arbres généraux selon le modèle des arbres binaires.
(4) Donnez la représentation sous forme d'arbre binaire des arbres de la question 2.
(5) Donnez l'algorithme du calcul de la hauteur en utilisant cette structure.
(6) De même pour l'algorithme calculant le nombre maximal de fils d'un nœud dans l'arbre.

Exercice 4 (Combinatoire des arbres binaires)**.**
.

(1) Quelle est la hauteur maximale d'un arbre binaire à n noeuds ?
(2) Combien de noeuds possède au maximum un arbre binaire de hauteur h ?
(3) Quelle est la hauteur minimale d'un arbre binaire à n noeuds ?
(4) Dessinez les 2 arbres binaires possibles de taille 2 et les 5 arbres binaires possibles de taille 3 (on ne prend pas en compte la valeur des noeuds, seulement la forme de l'arbre).
(5) Si T est un arbre binaire de taille 4, de quelles tailles peuvent être les sous-arbres gauches et droits de T ?
(6) À partir de la réponse à la question précédente, donnez une formule récursive pour C_n le nombre d'arbres binaires de taille n.

Exercice 5 (Arbre binaire de recherche)**.**

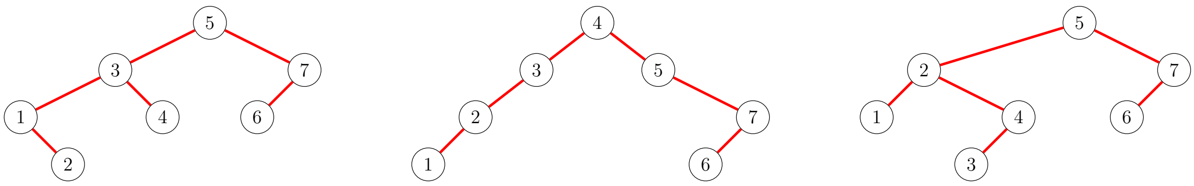
(1) Construisez les arbres binaires de recherche obtenus en insérant un par un les nombres des listes suivantes $\{4, 2, 5, 1, 3, 4, 5, 6\}$ et $\{4, 5, 6, 5, 2, 3, 1, 4\}$.
(2) Quel parcours de l'arbre binaire donne la liste triée ?
(3) Cherchez des exemples de listes de taille 7 telles que l'insertion donne un arbre binaire de profondeur 7.
(4) Même question mais cette fois on veut un arbre binaire de profondeur 3.

Exercice 6 (Rotation)**.**
L'opération suivante, (dont on donne un exemple sur la droite) s'appelle *la rotation droite*. L'opération inverse s'appelle *la rotation gauche*.

```
        y              x                  4              2
       / \            / \                / \            / \
      x   C   →      A   y              2   5   →      1   4
     / \                / \            / \                / \
    A   B              B   C          1   3              3   5
```

Ici, x et y sont des noeuds de l'arbre, et A, B et C sont des sous-arbres qui peuvent contenir plusieurs neuds.

(1) Effectuez une roation droite à la racine des arbres suivants :



(2) Même question avec une rotation gauche.
(3) La rotation peut s'appliquer sur n'importe quel noeud. Appliquez une rotation droite sur le noeud 3 dans les 2 premiers arbres exemples.
(4) Prouvez que la rotation (droite ou gauche) préserve la structure d'arbres binaires de recherche.

Exercice 7 (Équilibrage)**.**
Les opérations de rotation peuvent servir à "équilibrer" des arbres binaires de recherche. On dit qu'un arbre binaire est équilibré si pour chacun de ses noeuds la différence de profondeur entre son sous-arbre gauche et son sous-arbre droit est strictement inférieure en valeur absolue à 2. Dans la suite, on appellera cette différence la *valeur d'équilibre* du noeud.

(1) Calculez les valeurs d'équilibre pour tous les noeuds des 3 arbres donnés en exemple dans l'exercice précédent.

(2) Lesquels sont des arbres binaires équilibrés ?

(3) Parmis les 5 arbres binaires de taille 3, lesquels sont équilibrés ?

(4) Quelles opérations sont nécessaires pour "équilibrer" les autres ?

(5) Dans la figure décrivant la rotation droite, on suppose que A, B et C sont équilibrés et que les valeurs d'équilibre de x, et y sont respectivement 1 et 2. Prouvez que l'arbre obtenu après rotation est équilibré.

(6) Étudiez les autres cas (utilisez les résultats obtenus pour les arbres de taille 3).