# 2.1.Definicoes e Terminologia

Sergio Luis Lopes Verardi

21/03/2017

**Contents**



## 0.1 DEFINIÇÕES E TERMINOLOGIA

### 0.1.1 Classificação das Equações Diferenciais

Uma equação diferencial pode ser classificada de diferentes maneiras, com base em suas características.

A) Classificação pelo **Tipo** Equação Diferencial **Ordinária (EDO):** Contém apenas derivadas ordinárias da função incógnita com respeito a uma **única** variável independente.

Exemplos: $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$ $\quad \frac{d^2y(x)}{dx^2} - \frac{dy(x)}{dx} + 6y(x) = 0$ $\quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$ Observe que a terceira equação possui duas variáveis dependentes $(x, y)$ mas apenas uma variável independente $(t)$.

Neste curso abordaremos exclusivamente as equações diferenciais ordinárias. Equação Diferencial **Parcial (EDP):** Contém derivadas parciais das funções incógnitas com respeito a **duas ou mais** variáveis independentes.

Exemplos: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ Observe que, implicitamente, concluímos que as funções incógnitas das três equações são funções de duas variáveis independentes; por exemplo, na terceira equação, temos $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

B) Classificação pela **Ordem** A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de ordem mais alta da equação.

Exemplo: A equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ é uma equação diferencial ordinária de **ordem 2** uma vez que a derivada de ordem mais alta é uma derivada segunda. No segundo termo, a derivada está elevada ao cubo, mas é uma derivada de ordem 1.

**Notação** Ao longo do curso, usaremos dois tipos de notação para as derivadas ordinárias. A primeira é a **notação de Leibniz** $(dy/dx, \cdots, d^4y/dx^4, \cdots, d^ny/dx^n)$. A segunda notação é a **compacta**, que usa aspas para representar as primeiras três derivadas e, para derivadas de ordem mais alta, o grau envolvido por parênteses $(y', y'', y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)})$. Assim, a equação $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$

pode ser escrita como $y'' - y' + 6y = 0$. **Forma Geral e Forma Normal** Simbolicamente, uma equação diferencial ordinária de ordem $n$ pode ser escrita na **forma geral**:

$$F(x, y, y', \cdots, y^n) = 0$$

a qual explicita que $F$ é uma relação envolvendo a variável independente $x$, a variável dependente $y$ e suas derivadas até ordem $n$. A partir da forma geral obtemos a **forma normal** simplesmente isolando a derivada de ordem mais alta, ou seja:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

C) Classificação pela **Linearidade** Uma EDO de ordem $n$ é dita **linear** se, na forma geral, a função $F$ for linear em $y, y', \cdots, y^{(n)}$. Em outras palavras, a EDO tem a seguinte forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Os casos particulares mais importantes do ponto de vista deste curso são as EDOs de ordens 1 e 2:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Examinando as equações acima, vemos quais são as duas propriedades características de uma EDO linear:

- a variável dependente $y$ e todas as suas derivadas são de grau 1, ou seja, estão elevadas à potência 1
- os coeficientes $a_0, \cdots, a_n$ dependem no máximo da variável independente $x$ mas não podem depender de $y$ e suas derivadas

Uma EDO que não seja linear (pelos critérios anteriores) é dita **não linear**.
**Problema Resolvido** Classifique as equações diferenciais ordinárias fornecidas a seguir:

- $y'' - 2y = 0$: **linear** ($y$ e suas derivadas elevadas à potência 1; coeficientes dependentes apenas de $x$) e de **segunda ordem** (derivada mais alta é de ordem 2)
- $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$: **linear** ($y$ e suas derivadas elevadas à potência 1; coeficientes dependentes apenas de $x$) e de **ordem 3** (derivada mais alta é de ordem 3)
- $y'' + \sin y = 0$: **não linear** ($\sin y$ é uma função não linear de $y$) e de **segunda ordem** (derivada mais alta é de ordem 2)
- $2yy^{(4)} + y = 0$: **não linear** (coeficiente do primeiro termo não depende apenas de $x$) e de **ordem 4** (derivada mais alta é de ordem 4)

### 0.1.2 Conceito de Solução de uma Equação Diferencial Ordinária

O principal objetivo deste curso consiste em resolver, ou seja, encontrar soluções de uma EDO. Entretanto, o conceito de solução possui certas peculiaridades que devem ser esclarecidas antes de se estudar os métodos usados na sua determinação.

Definição: Solução de uma EDO Uma função qualquer, $y$, definida em um intervalo $I$, e que possua ao menos $n$ derivadas contínuas nesse intervalo, as quais, quando substituídas em um uma EDO de ordem $n$, reduzem a equação a uma identidade é denominada **solução** da EDO no intervalo $I$.

Usando a forma geral, a definição dada pode ser expressa matematicamente como:

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}) = 0 \quad \forall x \in I$$

Dizemos que $y$ **satisfaz** a EDO em $I$.

Intervalo de Definição

A definição acima realça o fato de que a solução de uma EDO vem sempre acompanhada do conceito de intervalo, isto é, é preciso sempre fornecer a solução da EDO e, simultaneamente, o intervalo para o qual ela está definida ou existe. Por isto, são utilizadas as expressões **intervalo de definição** ou **intervalo de existência** ou **intervalo de validade** ou **domínio da solução**. Esse intervalo pode ser aberto $(a, b)$, fechado, $[a, b]$, infinito, $(a, \infty)$ e assim por diante.

Verificação de Soluções Dada uma função, uma maneira de verificar se ela é solução de uma EDO consiste em substituí-la na equação e observar se os dois lados da equação são iguais para todo $x$ no intervalo de validade. Como exemplo, verifiquemos se a função $y = xe^x$ é solução da EDO $y'' - 2y' + y = 0$. Neste caso, é fácil verificar que o domínio da solução é toda a reta real, $(-\infty, +\infty)$. Vamos usar o Sage para simular o processo manual de verificação.

```
# Declara variável independente x
x=var('x')
# Define a função y(x)
y=x*exp(x)
# Calcula primeira derivada (o parâmetro 1, que é a ordem da \
    derivada, pode ser omitido neste caso, porque o default é igual a\
    1)
dy1 = diff(y,x,1)
show(dy1)
# Calcula segunda derivada
dy2 = diff(y,x,2)
show(dy2)
# Determina o lado esquerdo da EDO
lado_esq = dy2 - 2*dy1 + y
print('Lado Esquerdo da EDO:')
show(lado_esq)
```

$xe^x + e^x$

$xe^x + 2\,e^x$

Lado Esquerdo da EDO:

$0$

Portanto, acabamos de verificar que $y = xe^x$ é solução da EDO fornecida. Uma verificação mais compacta seria:

```
x=var('x')
y=x*exp(x)
lado_esq = diff(y,x,2)-2*diff(y,x,1)+y
lado_dir = 0
show(lado_esq - lado_dir)
```

0

Solução Trivial Observe que a equação diferencial do exemplo anterior possui uma solução constante e identicamente nula em todo o intervalo de validade, $y = 0$, que é denominada **solução trivial**.

Soluçoes Explícitas e Implícitas Uma solução na qual a variável dependente é expressa apenas em termos da variável independente e de constantes é chamada de **solução explícita**. Acabamos de ver uma solução deste tipo. No exemplo anterior, a solução $y = xe^x$ é explícita, uma vez que está expressa exclusivamente em termos da variável independente, $x$. Entretanto, como veremos mais adiante, nem sempre os métodos de solução de EDO levam a uma solução explícita $y = f(x)$; por exemplo, isto acontece para muitas EDOs não lineares de ordem 1. Nestes casos, temos que nos contentar com uma relação $G(x, y) = 0$, que define a solução $y(x)$ implicitamente.

Definição: Solução Implícita de uma EDO Dizemos que a relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial ordinária em um intervalo $I$ se existe pelo menos uma função $f(x)$ que satisfaz a relação bem como a equação diferrencial em $I$.

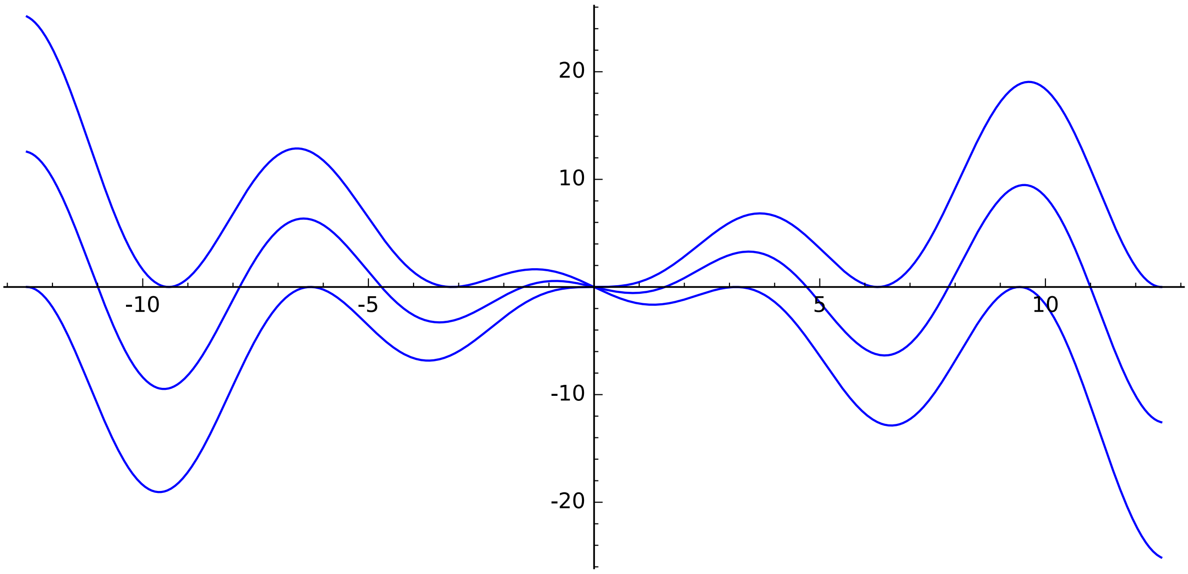
Família de Soluções O estudo de equações diferenciais possui semelhanças com o estudo do cálculo integral; a solução de uma EDO é chamada, por vezes, de **integral** da equação. No cálculo integral, quando determinamos a primitiva, por exemplo, usamos uma constante de integração, $c$. Analogamente, quando resolvemos uma EDO de ordem 1, $F(x, y, y') = 0$ usualmente obtemos uma solução contendo uma constante arbitrária $c$. Para uma EDO de ordem $n$, a solução contém $n$ constantes arbitrárias. Por este motivo, dizemos que, ao resolver uma EDO, obtemos uma **família de soluções**. Portanto, uma EDO pode ter um número infinito de soluções, cada uma correspondendo a uma escolha específica das constantes arbitrárias. Por outro lado, uma solução de uma EDO que não contém parâmetros arbitrários é chamada **solução particular**.

Exemplo 1 A família de um parâmetro $y = cx - x\cos x$ é uma solução explícita da EDO linear de ordem 1, $xy' - y = x^2 \sin x$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

```
###################################
# Verificação de que é solução
###################################
# Cria variável independente x, parâmetro c e variável dependente y
x = var('x')
c = var('c')
y = c*x-x*cos(x)
# Avalia lados esquerdo e direito da EDO
ladoesq = x*diff(y,x,1)-y
ladodir = (x^2)*sin(x)
f1 = ladoesq - ladodir
# Simplifica expressão simbólica obtida
# Descubra o que acontece sem a simplificação, comentando a instruçã\
  o abaixo
f2=f1.canonicalize_radical()
show(f2)
```

0

```
#############################################
# Gráfico da solução para os valores c=-1,0,1
#############################################
x = var('x')
c = var('c')
y = c*x-x*cos(x)
P = Graphics()
for k in range(-1,2,1) :
    P += plot(y.substitute(c==k), x, -4*pi, 4*pi)
P.show()
```



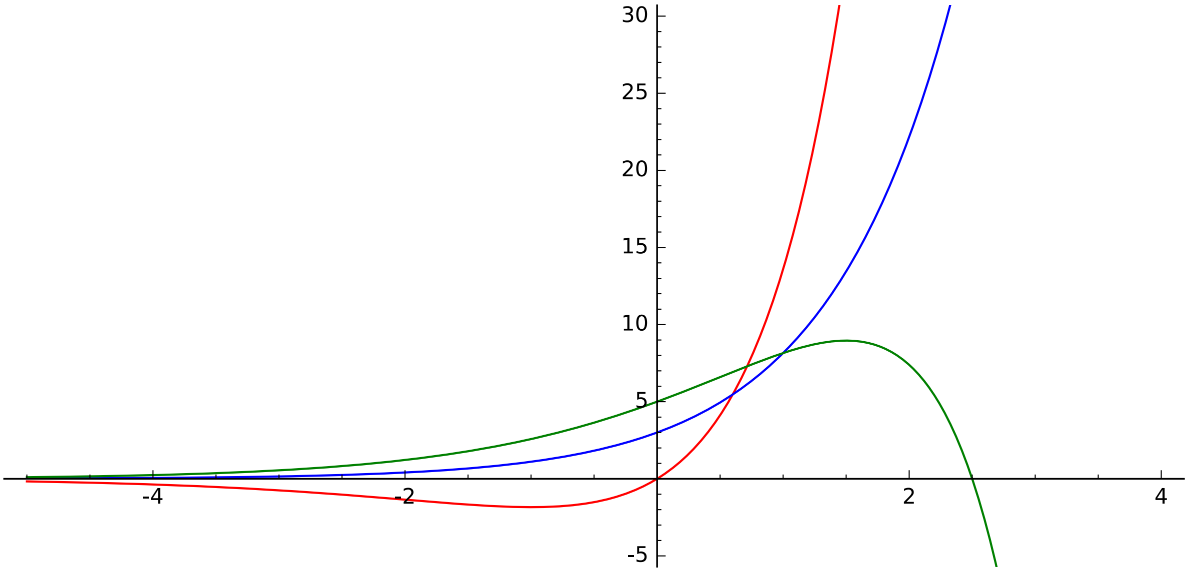

Exemplo 2 A família de dois parâmetros $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ é uma solução explícita da EDO linear de ordem 2, $y'' - 2y' + y = 0$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

A seguir, usamos o Sage para verificar que se trata de uma família de soluções da EDO e graficar as soluções particulares: $y = 5xe^x$ $(c_1 = 0,\ c_2 = 5)$, $y = 3e^x$ $(c_1 = 3,\ c_2 = 0)$ e $y = 5e^x - 2xe^x$ $(c_1 = 5,\ c_2 = 2)$.

```
############################
# Verificação de que é solução
############################
# Cria variável independente x, parâmetro c e variável dependente y
x = var('x')
c1 = var('c1')
c2 = var('c2')
y = c1*exp(x)+c2*x*exp(x)
# Avalia lado esquerdo (neste caso, não é preciso simplificação)
f3 = diff(y,x,2)-2*diff(y,x,1)+y
```

```
show(f3)

####################################################
# Gráfico de soluções particulares
####################################################
P = Graphics()
P += plot(y.substitute(c1==0,c2==5), x, -5, 4,ymin=-5, ymax=30,color\
   ='red')
P += plot(y.substitute(c1==3,c2==0), x, -5, 4,ymin=-5, ymax=30,color\
   ='blue')
P += plot(y.substitute(c1==5,c2==-2), x, -5, 4,ymin=-5, ymax=30,\
    color='green')
P.show()
```




0

Sistemas de Equações Diferenciais Até agora, discutimos uma única equação diferencial contendo apenas uma função incógnita mas, em muitas aplicações, nos deparamos com um **sistema de equações diferenciais**, isto é, um conjunto de duas ou mais equações envolvendo as derivadas de duas ou mais funções incógnitas de uma variável independente.

Como exemplo, sejam $x$ e $y$ duas variáveis dependentes de uma única variável independente, $t$. Então, um sistema de de duas equações de ordem 1 é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t,x,y) \end{aligned}$$

Uma solução de um sistema de EDOs é um par de funções diferenciáveis $(x = \phi_1(t),\ y = \phi_2(t))$, definidas em um intervalo comum $I$ e que satisfazem todas as equações do sistema.