Álgebra superior I

Tarea 6

Entrega: Martes 4 de Octubre

1. Sean $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{\emptyset, a, b\}$, con $\emptyset \neq a \neq b \neq \emptyset$. Diga cuáles de las siguientes relaciones son funciones de X en Y, justificando su respuesta:

   (a) $\{(1, \emptyset), (2, \emptyset), (3, a), (1, b)\}$.

   (b) $\{(1, a), (2, b), (3, \emptyset), (1, a)\}$.

   (c) $\{(2, \emptyset), (3, \emptyset)\}$.

2. Diga cuál es el dominio e imagen de las siguientes relaciones y posteriormente diga si son funciones en ese dominio, justificando su respuesta.

   (a) Para cualquier conjunto A, la relación diagonal Δ_A también llamada la identidad.

   (b) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $S \subset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, donde $S = \{(X, B \setminus X) | X \in \mathcal{P}(A)\}$.

3. Dé un ejemplo por cada uno de los siguientes incisos de conjuntos X, Y, un subconjunto A de X o subconjuntos A_1 y A_2 de X, y una función $f: X \to Y$ de forma que:

   (a) $f^*(A_1) \cap f^*(A_2) \not\subset f^*(A_1 \cap A_2)$.

   (b) $f^*(X \setminus A) \subsetneqq Y \setminus f^*(A)$.

   (c) $f^*(X \setminus A) \cap (Y \setminus f^*(A)) = \emptyset$.

   (d) $Y \setminus f^*(A) \subsetneqq f^*(X \setminus A)$.

4. Sean A y B conjuntos cualesquiera y sea $f: A \to B$. Pruebe que $I_B \circ f = f$ y $f \circ I_A = f$.

5. Dé ejemplos de conjuntos A y B y funciones $f: A \to B$ y $g: B \to A$ tales que:

   (a) $g \circ f = I_A$, pero $f \circ g \neq I_B$;

   (b) $g \circ f \neq I_A$, pero $f \circ g = I_B$.

6. Dé ejemplos de conjuntos A, B y C y de funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$ de forma que se cumpla lo siguiente (un ejemplo por inciso):

(a) g es sobre, pero $g \circ f$ no es sobre;

(b) f es inyectiva, pero $g \circ f$ no es inyectiva;

(c) f es inyectiva, g es sobre, pero $g \circ f$ no es ni inyectiva ni sobre;

(d) f no es sobre, g no es inyectiva, pero $g \circ f$ es biyectiva.

7. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera y sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $h\colon C \to D$ funciones.

   (a) Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

   (b) Demuestre que si $g \circ f$ es sobre, entonces g es sobre.

8. Sea $f\colon A \to B$ una función, con inverso derecho, demostrar que f es cancelable por la derecha.

9. Supongase que $f\colon A \to B$ es una biyección, entonces $f^*\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una biyección con inversa $f_*\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ demostrar que la función del conjunto de particiones de A al conjunto de particiones de B dada por:

$$P \mapsto \{f^*(C) | C \in P\}$$

   es una biyección. (*Sugerencia:* f^* biyeccion $\Rightarrow (f^*)^*$ biyección con inversa $(f^*)_*$.)