# 1 Calcul propositionnel

**1.1 .** Calculer les tables de vérité des propositions suivantes.

(a) $\neg p \wedge q$

(b) $p \vee (\neg p \to q)$

(c) $p \vee (p \to \neg q)$

(d) $(\neg p \wedge q) \to r$

**1.2 .** Calculez la valeur de vérité de $(p \vee q) \to (\neg p \wedge q)$, sachant que $p$ est fausse et $q$ est vraie.
**Solution de l'exercice 1.2.** Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}(p \vee q) \to (\neg p \wedge q) &\Leftrightarrow (F \vee V) \to (\neg F \wedge V)\\ &\Leftrightarrow V \to V\\ &\Leftrightarrow V\end{aligned}$$

Ainsi, la proposition est vraie.

**1.3 .** À l'aide des tables de vérité, puis en utilisant les propriétés des opérations logiques, montrez que les propositions suivantes sont des tautologies.

(a) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ (de Morgan)

(b) $[(p \vee q) \wedge r] \leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ (distributivité de $\vee$ sur $\wedge$)

(c) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ (contraposée)

**1.4 .** Trouvez la négation des propositions suivantes. Simplifiez de telle sorte que les négations s'appliquent seulement sur les propositions simples $p, q, r$.

(a) $(\neg p \vee q)$

(b) $p \to (q \vee r)$

(c) $p \wedge (q \to r)$

**Solution de l'exercice 1.4.**

(a) $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

(b) $\neg(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q \vee r) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r$.

(c)

$$\begin{aligned}\neg[p \wedge (q \to r)] &\Leftrightarrow \neg[p \wedge (\neg q \vee r)]\\ &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg(\neg q \vee r)\\ &\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge \neg r)\\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)\end{aligned}$$

**1.5 .** Pour chaque paire de propositions ci-bas, déterminez si elles sont logiquement équivalentes. Justifiez.

(a) $(p \to q) \to r$ et $p \to (q \to r)$.

(b) $\neg p \to \neg q$ et $q \to p$.

(c) $\neg(q \to p)$ et $(\neg q) \to p$.

**1.6.** Pour chacune des propositions conditionnelles ci bas, trouvez et simplifiez :
**i**. sa réciproque ; **ii**. sa contraposée ; **iii**. sa négation.

(a) $p \to \neg q$

(b) $p \wedge \neg q \to r$

(c) $\neg p \to \neg q$

(d) $p \to q \wedge \neg r$

(e) Si Bob se sent bien, alors Bob ira danser ou au cinéma.

(f) Si Bob échoue mathématiques discrètes ou algèbre I, alors il ne pourra pas graduer.

**Solution de l'exercice 1.6.**

(a)

(b) $p \wedge \neg q \to r$

**réciproque :** $r \to (p \wedge \neg q)$ qui est équivalente (entre autres) à $\neg r \vee (p \wedge \neg q)$.

**contraposée :** est $\neg r \to \neg(p \wedge \neg q)$ qui est équivalente (entre autres) à $r \vee \neg p \vee q$.

**négation :** $\neg(p \wedge \neg q \to r)$ est équivalente à $p \wedge \neg q \wedge \neg r$.

(c)

(d) $p \to q \wedge \neg r$

**réciproque :** $(q \wedge \neg r) \to p$ qui équivaut à $\neg(q \wedge \neg r) \vee p$

**contraposée :** $\neg(q \wedge \neg r) \to \neg p$ qui équivaut à $(q \wedge \neg r) \vee \neg p$.

**négation :** $\neg(p \to q \wedge \neg r)$ qui équivaut à $p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$

(e)

(f) *"Si Bob se sent bien, alors Bob ira danser ou au cinéma.* Posons :

$p$ : Bob se sent bien ;
$q$ : Bob ira danser :
$r$ : Bob ira au cinéma.

Ainsi, la proposition originale est $p \to (q \vee r)$.

**réciproque :** $(q \vee r) \to p$. En français on lirait : *"Si Bob va danser ou au cinéma, il se sent bien"*

**contraposée :** $\neg(q \vee r) \to \neg p$. Ceci équivaut à $(\neg q \wedge \neg r) \to \neg p$. en français on dirait *"Si Bob ne va pas danser ni au cinéma, il ne se sent pas bien"*

**négation :** $\neg(p \to (q \vee r))$ qui équivaut à $p \wedge \neg(q \vee r)$. En français on dirait *"Bob se sent bien, mais il n'ira danser ni au cinéma"*.

**1.7.** On considère l'énoncé suivant : "Bob ne sourit pas, mais il est content".

(a) Écrivez-le en utilisant des propositions élémentaires et des connecteurs logiques.

(b) Niez l'énoncé précédent.

**1.8 .**

(a) À l'aide des tables de vérité, montrez que la proposition suivante est une tautologie : $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

(b) Refaites la démonstration, mais sans l'utilisation de tables de vérité.

*Remarque :* Ceci démontre que pour prouver $p \to q$ par contradiction, on peut supposer que $p$ est vraie mais que $q$ est fausse.

**Solution de l'exercice 1.8.** Cet exercice a été résolu en classe.

**1.9.** Déterminer, sans utiliser les tables de vérité (c'est à dire en utilisant uniquement des propriétés déjà établies), si les propositions suivantes sont équivalentes ou pas :

(a) $p \wedge (\neg(q \wedge r))$ et $(p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r)$.

(b) $\neg(p \vee (q \wedge r))$ et $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee r)$.

(c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r)$ et $p \wedge q$.

(d) $(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r)$ et $p \vee r$.

**1.10 .** Démontrez que l'opération $\neg$, avec l'une parmi $\wedge, \vee$ et $\to$ peut être utilisée pour définir les deux autres.

**1.11 Problème défi : des menteurs et des honnêtes.** Vous êtes à un carrefour. Dans une direction se trouve la ville V où tous les habitants disent toujours la vérité. Dans la direction opposée se trouve ville M où tous les habitants mentent toujours. Le problème, c'est que vous ne savez pas laquelle est laquelle ! Une personne s'approche ; par le miracle des problèmes mathématiques, vous savez qu'elle habite V ou M mais vous ne savez pas laquelle. Quelle question pouvez-vous lui demander afin de savoir dans quelle direction est V et dans laquelle est M ?

**1.12 Problème défi : Bleu, Blanc et Rouge.** Messieurs Bleu, Blanc et Rouge portent chacun une chemise. Une chemise est bleue, une est blanche et une est rouge. Monsieur Bleu dit : "Avez-vous remarqué que nous portons tous des chemises de couleur différente de notre nom ?" L'homme portant la chemise blanche répond : "C'est bien vrai ça, Monsieur Bleu." Quelle est la couleur de la chemise de chacun de nos protagonistes ?

**Solution de l'exercice 1.12.** Suite à la première affirmation de M. Bleu on conclut que c'est soit M. Blanc, soit M. Rouge qui porte la chemise bleue.

L'homme portant la chemise blanche (qui est différent de M. Bleu) lui donne raison. Mais cet homme ne peut être M. Blanc. Ainsi, M. Rouge porte la chemise blanche, M. Bleu porte la chemise rouge, et M. Blanc porte la chemise bleue.

# 2 Ensembles et quantificateurs

**2.1 .** Démontrez que si $A \subseteq B$, alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.

**2.2 .** Pour chacune des tautologies (2) à (14) de la page 4 des notes de cours donnez un énoncé analogue concernant les ensembles, puis démontrez-le.

**2.3 .** En utilisant des propriétés d'ensembles démontrez que :

(a) $A^c \cap (B \cup C^c) = (A^c \cap B) \cup (A \cup C)^c$ ;

(b) $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$ ;

(c) $(A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap (B^c \cup C)) = A^c$.

(d) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B$

**Solution de l'exercice 2.3.**

(a)

$$\begin{aligned} A^c \cap (B \cup C^c) &= (A^c \cap B) \cup (A^c \cap C^c) && \text{(distributivité)} \\ &= (A^c \cap B) \cup (A \cup C)^c && \text{(De Morgan)} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (A \cap B^c) \cup (A \cap B) &= (A \cup A) \cap (A \cup B) \cap (B^c \cup A) \cap (B^c \cup B) && \text{(distributivité)} \\ &= A \cap (A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap \mathcal{U} && \text{(idemp., comm, univ.)} \\ &= A \cap (A \cup (B \cap B^c)) && \text{(distrib. univers )} \\ &= A \cap (A \cup \emptyset) \\ &= A \cap A \\ &= A \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap (B^c \cup C)) &= [A^c \cap (B^c \cup C)^c] \cup [A^c \cap (B^c \cup C)] && \text{(De Morgan)} \\ &= A^c \cap [(B^c \cup C)^c \cup (B^c \cup C] && \text{(distrib.)} \\ &= A^c \cap \mathcal{U} \\ &= A \end{aligned}$$

**2.4 .** On dit qu'une fonction réelle $f$ d'une variable réelle définie sur un intervalle $[a, b]$ est *bornée inférieurement* s'il existe un nombre réel $m$ tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x$ dans $[a, b]$.

(a) Donnez un formulation de cette définition en utilisant des symboles mathématiques.

(b) Donnez la définition de la notion d'une fonction *bornée supérieurement.*

(c) Une fonction $f$ est bornée, si elle est bornée inférieurement et bornée inférieurement. Donnez une définition de ce qu'une *fonction bornée* est en utilisant le langage mathématique.

**2.5 .** Soit $\mathcal{L}$ une collection finie de livres. Étant donnés deux livres $x$ et $y$ de $\mathcal{L}$, on écrit $p(x, y)$ au lieu de *“ le livre $x$ a autant ou plus de pages que le livre $y$”*. Considérons les propositions suivantes

— $\mathbb{P}_1 : \forall x \in \mathcal{L},\ \exists y \in \mathcal{L} \mid p(x,y)$

— $\mathbb{P}_2 : \forall y \in \mathcal{L},\ \exists x \in \mathcal{L} \mid p(x,y)$

— $\mathbb{P}_3 : \exists x \in \mathcal{L},\ \forall y \in \mathcal{L} \mid p(x,y)$

— $\mathbb{P}_4 : \exists x \in \mathcal{L},\ \exists y \in \mathcal{L} \mid p(x,y)$

(a) Écrivez en français les propositions $\mathbb{P}_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

(b) Dites lesquelles sont vraies. Justifiez.

(c) Niez (en langage mathématique) les propositions $\mathbb{P}_i$

**Solution de l'exercice 2.5.**

(a) On suppose la collection non vide. Des propositions équivalentes, en français :

$\mathbb{P}_1$ : pour tout livre $x$ de la collection, il existe un livre $y$ de la collection tel que $x$ a au moins autant de pages que $y$.

$\mathbb{P}_2$ : pour tout livre $y$ de la collection il existe un livre $x$ tel que $x$ a au moins autant de pages que $x$.

$\mathbb{P}_3$ : Il existe un livre $x$ dans la collection qui a au moins autant de pages que tous les livres de la collection.

$\mathbb{P}_4$ : Il existe un livre $x$ de la collection et il existe un livre $y$ de la collection tels que $x$ a au moins autant de pages que $y$.

(b) Les nombres possibles de pages des ivres de la collection sont des naturels positifs, et il y a une quantité finie. Parmi ces nombres il y a un minimum et un maximum. Soit $m$ le livre ayant le moins de pages (il y a possiblement plusieurs tels livres), et $M$ un livre dont le nombre de pages est le maximum.

$\mathbb{P}_1$ Vrai. Par construction $\forall x \in \mathcal{L}$ on a $p(x,m)$ est vraie.

$\mathbb{P}_2$ Vrai. Par construction $\forall y \in \mathcal{L}$ on a $p(M,y)$ est vraie.

$\mathbb{P}_3$ Vrai. Prendre $x = M$.

$\mathbb{P}_4$ Vrai. Aussitôt que la collection est non vide, puisque on a $p(x,x)$ vraie pour tout $x$.

(c) Pour nier une proposition quantifiée il suffit de "renverser" les quantificateurs, puis nier la proposition.
— $\neg\mathbb{P}_1 : \exists x \in \mathcal{L},\ \forall y \in \mathcal{L} \mid \neg p(x,y)$
Les autres sont laissées en exercice.

**2.6 .** Pour chacune des propositions suivantes, formulez-la en utilisant le langage mathématique, trouvez sa négation et donnez la valeur de vérité de la proposition donnée.

(a) Il existe un entier dont l'inverse est aussi un entier.

(b) Il existe un entier $n$ tel que pour tout nombre réel $t$, $t^n$ est non négatif.

(c) Pour tout réel $x$ il existe un réel $y$ tel que $x + y = 0$

(d) Il existe des réels $x, y$ tels que leur somme est un entier, mais leur produit ne l'est pas.

(e) Le carré de n'importe quel nombre entier est un entier non négatif.

**2.7 .** Dans les énoncés suivants, déterminez lesquels parmi les symboles $\in, \subseteq, =$ peut remplacer la symbole "?" de sorte à avoir un énoncé vrai.

(a) $\{1\}$ ? $\{1,2\}$ ;

(b) $\{6,7,8\}$ ? $\{8,7,6\}$ ;

(c) $\{9\}$ ? $\{9,\{9,10\}\}$ ;

(d) $\{3\}$ ? $\{3,\{3\},\{\{3\}\}\}$.

**Solution de l'exercice 2.7.**

(a) $\subseteq$ ;

(b) $\subseteq$ et $=$ ;

(c) $\subseteq$ ;

(d) $\in$ et $\subseteq$.

**2.8 .** Soient $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ et $C = \{\{a,b\},\{a,b,c\},\{d\}\}$.

(a) Trouver $A\triangle B$.

(b) Trouver $(A\backslash\{a,b\}) \times (B\backslash\{c,d\})$.

(c) Dites, avec la justification nécessaire, si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

1. $B \subseteq A$,
2. $B \in A$,
3. $B \subseteq \mathcal{P}(A)$,
4. $C \in \mathcal{P}(A)$,
5. $C \subseteq \mathcal{P}(A)$,
6. $C \subseteq A$.

(d) Parmi les ensembles $A$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)), \ldots$ , trouver un ensemble qui contienne l'ensemble $X = \{\{\{a,b\},\{a\}\},\{\{c\}\}\}$ comme <u>élément</u>, ainsi qu'un qui contienne $\{X\}$ comme <u>sous-ensemble</u>.

**2.9 .** Démontrez les identités suivantes :

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ;

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ;

(c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ ;

(d) $A \times (B\triangle C) = (A \times B)\triangle(A \times C)$.

**Solution de l'exercice 2.9.**

(a) On utilise la définition, et les propriétés des connecteurs logiques.

$$\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= \{(a,d)|\ a \in A \wedge d \in B \cup C\} \\
&= \{(a,d)|\ a \in A \wedge (d \in B \vee d \in C)\} \\
&= \{(a,d)|\ (a \in A \wedge d \in B) \vee (a \in A \wedge d \in C)\} \\
&= \{(a,d)|\ (a \in A \wedge d \in B)\} \cup \{(a,d)|\ (a \in A \wedge d \in C)\} \\
&= (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

(b) Se fait de la même façon.

(c) On montre deux inclusions.

- D'abord soit $x \in A \times (B \setminus C)$, c'est à dire que $x = (a,b)$ avec $a \in A$ et $b \in B \setminus C$. Ceci revient à dire que $b \in B$ mais $b \notin C$. Ainsi, $x \in A \times B$ mais $x \notin A \times C$. Ceci montre que $A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$.

- Pour l'autre inclusion, soit $x \in (A\times B)\setminus(A\times C)$, c'est à dire $x = (a, b)$ tel que $(a, b) \in A\times B$ mais $(a, b) \notin (A \times C)$. La première condition donne $a \in A$, tandis que la deuxième donne $b \in B \setminus C$. Ceci montre que $(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C)$.

**2.10.** On donne des ensembles $X, Y, Z$. Pour chacun des énoncés suivants, déterminez s'il est vrai ou pas. Si l'énoncé est vrai, prouvez-le, s'il est faux, donnez un contre-exemple.

(a) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$ ;

(b) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cup Z$ ;

(c) $(X \cap Y) \cup (Y \setminus X) = X$.

**2.11.** Parmi les entiers compris entre 1 et 1 000 000, combien ne sont pas divisibles par $2, 3$ ni 5 ?

**Solution de l'exercice 2.11.** Soit $E = \{n|\, n \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant n \leqslant 1\ 000\ 000\}$. Posons $N_2 = \{n|n \in E \text{ et } 2|n\}$. Le ensembles $N_3$ et $N_5$ sont définis de la même façon. On veut calculer la cardinalité de $E \setminus (N_2 \cup N_3 \cup N_5)$. Par le principe d'inclusion-exclusion on calculer

$$\begin{array}{rcl} |N_2 \cup N_2 \cup N_3| & = & |N_2| + |N_3| + |N_5| \\ & - & |N_2 \cap N_3| - |N_2 \cap N_5| - |N_2 \cap N_5| \\ & + & |N_2 \cap N_3 \cap N_5| \end{array}$$

Or $N_3 \cap N_5 = N_{15}$, et on a $|N_{15}| = \left\lfloor \frac{1\ 000\ 000}{15} \right\rfloor = 66\ 666$ (ici $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$). On utilise les mêmes calculs pour déterminer que la cardinalité cherchée est

$$1\ 000\ 000 - |N_2 \cup N_2 \cup N_3| = 266\ 666$$

**2.12.** Dans un sondage effectué auprès de 1000 personnes, on a trouvé que 375 personnes mangent des moules, 450 personnes mangent des frites et 150 personnes mangent les deux.

(a) Combien de personnes mangent des moules ou des frites ?

(b) Combien de personnes ne mangent pas de moules ni de frites ?

# 3 Preuves

**3.1 .** Pour chacun des énoncés suivants, donnez une formulation en utilisant des quantificateurs et autres symboles mathématiques, puis dites (preuve à l'appui) si l'énonce est vrai ou faux.

(a) Si $m$ et $n$ sont des entiers pairs, alors leur somme est aussi un entier pair.

(b) Si $m$ et $n$ sont des entiers impairs, alors leur somme est aussi un entier impair.

(c) Si $m$ et $n$ sont des entiers impairs, alors leur produit est aussi un entier impair.

(d) Si $m$ et $n$ sont des entiers avec $n$ pair, alors le produit $mn$ est un entier pair.

**Solution de l'exercice 3.1.**

(b) On dénote par $2\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres pairs. Ainsi, $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres impairs.

— L'énoncé est $\forall m, n \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$, $m + n \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$.

— L'énoncé est faux, il suffit de présenter un contre-exemple : 1 et 3 sont impairs, mais leur somme $1 + 3 = 4$ est paire.

**3.2 .** Démontrez par contradiction les énoncés suivants :

(a) Si $x$ et $y$ son des réels tels que $x + y \geqslant 2$, alors $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$.

(b) Si $x, y$ sont des réels tels que $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.

(c) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

(d) $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, pour tout $p$ premier.

**Solution de l'exercice 3.2.**

(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy = 0$ et supposons au contraire que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Comme $x \neq 0$, on peut diviser par $x$ des deux côtés de l'égalité :

$$xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{xy}{x} = \frac{0}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = 0,$$

ce qui est une contradiction à la supposition que $y \neq 0$.

**3.3 .**

(a) Démontrez que le produit d'un nombre irrationnel **non nul** par un nombre rationnel est un nombre irrationnel.

(b) Que peut-on dire du produit de deux nombres irrationnels ?

**Solution de l'exercice 3.3.**

(a) Soit $a \in \mathbb{Q}^*$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supposons au contraire que leur produit $ab$ est rationnel : $ab \in \mathbb{Q}$.
Alors, $ab$ s'écrit comme une fraction :

$$ab = \frac{p}{q}, \qquad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*.$$

Comme $a \neq 0$ par hypothèse, on peut diviser par $a$ des deux côtés de l'égalité :

$$ab = \frac{p}{q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{ab}{a} = \frac{p}{qa} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{p}{qa} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est une contradiction à la supposition que $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**3.4 .** Étant donnés $n$ nombres, $s_1, \ldots, s_n$, on définit $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i$.

(a) Démontrez par contradiction qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $s_i \geqslant \mu$.

(b) Est-il vrai qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $s_i > \mu$ ? Quelle technique de preuve vous permet de conclure ?

(c) Supposez qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $s_i < \mu$. Est-ce vrai qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $s_j \geqslant \mu$ ? Quelle technique de preuve vous permet de conclure ?

**Solution de l'exercice 3.4.**

(a) Supposons au contraire que $s_i < \mu$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors,

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu,$$

une contradiction, puisque $\mu$ ne peut être strictement plus petit que $\mu$.

**3.5 .** Étant donnés deux nombres réels $x, y$ on définit

$$\max\{x,y\} = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant y \\ y & \text{si} \quad x < y, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \min\{x,y\} = \begin{cases} y & \text{si} \quad x \geqslant y \\ x & \text{si} \quad x < y \end{cases}$$

(a) Démontrez, en étudiant les différents cas possibles, que $\max\{x,y\} + \min\{x,y\} = x + y$.

(b) Démontrez, en étudiant les différents cas possibles, que $\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

(c) Donnez une formule, similaire à celle donnée en (b), pour $\min\{x,y\}$ et démontrez qu'elle est valide.

**3.6 .** Une fonction $f$ définie sur la droite réelle est dite *périodique* s'il existe un réel positif $p$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. La *période* de $f$ est le plus petit réel strictement positif $p$ vérifiant cette condition.

(a) Montrez que si $f$ et $g$ sont périodiques de même période, alors il en est de même pour $f + g$ et $f - g$.

(b) Montrez que si $f$ est périodique, il en est de même pour $f^2$.

(c) Montrez que si $f$ et $g$ sont périodiques de même période, alors il en est de même pour $fg$.

(d) Montrez que si $f$ est périodique, il en est de même pour $f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

**Solution de l'exercice 3.6.** Il faut bien noter que $f^2$ désigne la fonction définie par $f^2(x) = [f(x)]^2$. Il ne s'agit pas de la composition des fonctions. On peut montrer des résultats analogues aux exercices (b) et (d) avec la composition de fonctions, mais l'hypothèse à l'effet que les deux fonctions ont la même période est trop forte en (c)

(b) Soit $f$ périodique, on veut montrer que $f^2$ l'est aussi. En effet

$$f^2(x+p) = f(x+p) \cdot f(x+p) = f(x) \cdot f(x) = f^2(x)$$

(d) Supposons que $f$ est périodique. On désire prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante

$$P_k : f^k \text{ est périodique.}$$

On procède par récurrence :
**Base :** Par hypothèse, nous avons que $P_1 : f^1 = f$ est périodique est vraie
**Pas de récurrence :** On veut montrer que le fait que $P_n$ soit vraie implique que $P_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $f^n$ périodique implique $f^{n+1}$ périodique.
Supposons donc que $f^n$ est périodique, et montrons qu'il en va de même pour $f^{n+1}$. Pour tut $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x+p) &= f(x+p) \cdot f^n(x+p) \\ &= f(x) \cdot f^n(x) \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= f^{n+1}(x) \end{aligned}$$

Donc, $f^{n+1}$ est périodique.
En vertu du principe de récurrence, si $f$ est périodique, alors $f^k$ est périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

**3.7.** Montrez par récurrence les identités suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

(b) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{1}{2}n(3n-1).$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$

(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} j^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}n(n+1).$

(e) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}.$

(f) $\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{3^2-1} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2-1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2(n+2)}$

**Solution de l'exercice 3.7.**

(c) On désire prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante est vraie

$$P_n : \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

**Base :** On doit vérifier

$$P_1 : \sum_{k=1}^{1} k(k+1) \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}1(1+1)(1+2).$$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 2 = \frac{1}{3}1(1+1)(1+2).$$

**Pas de récurrence :** On veut montrer que le fait que $P_n$ soit vraie implique que $P_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que l'égalité $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ implique que $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \text{ (par hypothèse)} \\
&= (n+1)(n+2)(\frac{1}{3}n+1) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).
\end{aligned}$$

En vertu du principe de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(e) On veut prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante est vraie

$$P_n : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \stackrel{?}{=} \frac{n}{2n+1}$$

**Base :** On doit vérifier

$$P_1 : \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2(1)+1}.$$

C'est vrai, puisque

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2(1)-1)(2(1)+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2(1)+1}.$$

**Pas de récurrence :** On veut montrer que le fait que $P_n$ soit vraie implique que $P_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \text{ entraîne que } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \text{ (par hypothèse)} \\
&= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)}{(2n+3)}.
\end{aligned}$$

On conclut en vertu du principe de récurrence.

**3.8.** Considérons la suite $a_n$ définie de la manière suivante :

$$a_0 = \frac{1}{4}$$
$$a_{n+1} = 2a_n(1-a_n), \; n \in \mathbb{N}^+$$

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

**Solution de l'exercice 3.8.** On démontre l'égalité par récurrence.

**Base :** On vérifie que $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right) \stackrel{?}{=} a_n$ si $n = 0$.
C'est vrai, puisque

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^0}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = a_0.$$

**Pas de récurrence :** On suppose que l'égalité est vraie pour un certain $n$, c'est-à-dire que

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

et on vérifie qu'alors,

$$a_{n+1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right).$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_n(1-a_n) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^n+1}}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^n+1}}-\frac{1}{2^{2^n+1}}+\frac{1}{2^{2^{n+1}+1}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^{n+1}+1}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right).
\end{aligned}$$

Le résultat suit du principe de récurrence.

**3.9.** Démontrez par récurrence que :

(a) $7^n - 1$ est divisible par 6 pour tout $n \geqslant 1$.

(b) $11^n - 6$ est divisible par 5 pour tout $n \geqslant 1$.

(c) $6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$ est divisible par 4 pour tout $n \geqslant 1$

**Solution de l'exercice 3.9.**

(a) À l'aide du principe de récurrence, on démontre que la propriété

$$P_n : 6 \text{ divise } 7^n - 1$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Base :** On doit vérifier $P_1$ : 6 divise $7^1 - 1 = 6$. C'est vrai.

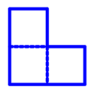
**Pas de récurrence :** On veut montrer que le fait que $P_n$ soit vraie implique que $P_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire vérifier que si 6 divise $7^n - 1$, alors 6 divise $7^{n+1} - 1$.

$$\begin{aligned}
7^{n+1} - 1 &= 7^n(7) - 1 \\
&= 7^n(6+1) - 1 \\
&= 6(7^n) + (7^n - 1).
\end{aligned}$$

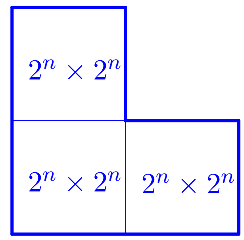
Donc, puisque 6 divise $6(7^n)$ et, par hypothèse de récurrence, 6 divise $(7^n - 1)$, 6 divise la somme $6(7^n) + (7^n - 1) = 7^{n+1} - 1$.

Le résultat suit du principe de récurrence.

**3.10.** Un *triomino* est une figure géométrique formée de trois carrés, comme dans la figure ci -bas. Une *figure L de taille* $2^n \times 2^n$ est une figure de la forme d'un triomino, mais comportant 3 carrés, chacun étant lui même composé de $2^n \times 2^n$ carrés. Démontrez que toute *figure L de taille* $2^n \times 2^n$ peut être pavée avec des triominos



Un triomino.




Une figure $L$ de taille $2^n \times 2^n$.

**3.11.** Pour tout réel $x$, la *partie entière* de $x$, qu'on dénote $\lfloor x \rfloor$, et le plus petit entier inférieur ou égal à $x$. On définit une suite de nombres par

$$c_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad c_n = c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n^2 \text{ pour } n > 1$$

(a) Calculez les valeurs de $c_1, c_2, c_3, c_4$ et $c_5$.

(b) Démontrez, en utilisant l'induction forte, que $c_n < 4n^2$ pour tout $n \geqslant 1$.

**3.12.** Avant chaque match de basket-ball dans une ligue connue, on nomme les 5 joueurs partants de chaque équipe. L'entraîneur d'une équipe utilise toujours les mêmes 5 joueurs pour commencer ses joutes, et il voudrait que pendant la saison les joueurs soient toujours présentés en ordres différents.

(a) Est-ce possible si la saison comporte 81 matchs ?

(b) Si la saison comporte 162 matchs ?

(c) Quel est le nombre maximal de matchs qu'une saison peut avoir afin que ce capricieux entraîneur puisse agir selon ses souhaits ?

**3.13.**

(a) Montrez que si vous choisissez 12 nombres entiers, il y en a deux dont la différence est un multiple de 10. Est-ce vrai si on en choisit 11 ? 10 ?

(b) Il y a 12 personnes dans une réunion et certaines se saluent en arrivant. Montrez qu'il y a deux personnes qui ont salué le même nombre de personnes.

(c) Neuf personnes sont assises dans une rangée de douze chaises. Montrez qu'il y a au moins un groupe de trois personnes assises les unes à côté des autres (c'est-à-dire, il y a une suite de trois chaises occupées).

**Solution de l'exercice 3.13.**

(a) Nous résolvons la question dans un ordre différent, pour simplifier.

— C'est faux pour 10 entiers : il est possible de choisir 10 entiers de façon à ce que toutes les différences deux à deux de ces entiers ne soient pas des multiples de 10. Pour le prouver, on construit un exemple.

Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. On a que $A \subseteq \mathbb{Z}$ et, pour tous $a, b \in A$,

$$|a - b| < 10.$$

La différence de deux entiers dans $A$ n'est donc jamais un multiple de 10.

— C'est vrai pour 11 entiers : pour tout ensemble $A$ de 11 entiers, il existe $a_i, a_j \in A$ tels que $a_i - a_j = 10k$ (pour un certain $k \in \mathbb{Z}$).
On le démontre directement. Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$ un ensemble de nombres entiers. On cherche deux entiers tels que leur différence soit un multiple de 10.
Pour $x \in \mathbb{Z}$, notons $r_{10}(x)$ le reste de la division euclidienne par 10. On a que $x$ est un multiple de 10 si et seulement si $r_{10}(x) = 0$.
Considérons, pour tout $a \in A$, le reste de la différence avec $a_1$ :

$$r_{10}(a - a_1).$$

S'il existe $a \in A \setminus \{a_1\}$ tel que $r_{10}(a - a_1) = 0$, leur différence est un multiple de 10 et la preuve s'achève.
Sinon, $r_{10}(a - a_1) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Il y a 10 éléments dans l'ensemble $A \setminus \{a_1\}$ et 9 possibilités pour $r_{10}(a - a_1)$. En vertu du principe des tiroirs, il existe $a_i \neq a_j$ deux éléments de $A$ tels que

$$r_{10}(a_i - a_1) = r_{10}(a_j - a_1) = r.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} r_{10}(a_j - a_i) &= r_{10}((a_j - a_1) - (a_i - a_1)) \\ &= r_{10}(r_{10}(a_j - a_1) - r_{10}(a_i - a_1)) \\ &= r_{10}(r - r) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La différence de $a_i$ et $a_j$ est donc un multiple de 10, et la preuve s'achève.

— C'est vrai pour 12 entiers : Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\}$ un ensemble de nombres entiers. Alors, $A \setminus \{a_{12}\}$ est un ensemble de 11 entiers. On a démontré que pour tout ensemble de 11 entiers, il existe $a_i, a_j$ dans cet ensemble tels que $a_i - a_j = 10k$ (pour un certain $k \in \mathbb{Z}$). Mais $a_i, a_j$ sont des éléments de $A$, puisque $A \setminus \{a_{12}\} \subseteq A$. La preuve s'achève.

(b) On remarque qu'une personne ne peut se saluer elle-même. Deplus, une personne a salué tous les autres si et seulement si aucune personne n'a salué personne.
Il y a donc 12 personnes et 11 possibilités pour le nombre de personnes saluées par chacune d'entre elles : 1,2,3,4,5,6,7,8,9 et $x$, où $x = 0$ ou $x = 11$.
En vertu du principe des tiroirs, on conclut qu'il y a deux personnes qui ont salué le même nombre de personnes.

# 4 Arithmétique

**4.1 .** Déterminer, parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais et lesquels sont faux. Si un énoncé est vrai, en faire la démonstration, s'il est faux, fournir un contre-exemple. Dans tout l'exercice $a, b, c$ et $d$ sont des entiers.

(a) Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|bc$.

(b) Si $a|b$ et $a|c$ alors $a^2|bc$.

(c) Si $a|c$ et $b|c$ alors $ab|c$.

(d) Si $a|c$ et $b|c$ alors $ab|c^2$.

(e) Si $a|c$ et $b|c$ alors $(a+b)|c$.

(f) Si $a|c$ et $b|d$ alors $ab|cd$.

(g) Si $a|c$ et $b|d$, alors $(a+b)|(c+d)$.

**4.2 .** Un sous ensemble $H \subseteq \mathbb{Z}$ est dite être *stable pour la soustraction* si $h_1 - h_2 \in H$ lorsque $h_1, h_2 \in H$. On définit de façon évidente ce qu'est un ensemble *stable pour l'addition.*

Parmi les sous-ensembles suivants, déterminez, preuve à l'appui, lesquels sont stables pour l'addition et / ou la soustraction.

(a) Les entiers $n$ tels qu'une puissance de $n$ est divisible par 64.

(b) Les entiers $n$ qui sont co-premiers avec 7.

(c) Les entiers $n$ tel que $n$ est un diviseur de 24.

(d) Les entiers $n$ tels que $6|n$ et $24|n^2$.

(e) Les entiers $n$ tels que $9|21n$.

**4.3 .** Montrer que pour des entiers $a, b, c$ non nuls on a :

(a) $((a,b),c) = (a,(b,c)) = ((a,c),b)$

(b) $(a+bc, b) = (a,b)$.

(c) $(a+3b, 4a+13b) = (a,b)$

**4.4 .** Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

(a) Si $(a,b) = 1$, $a|c$ et $b|c$, alors $ab|c$.

(b) Si $(a,c) = d$, $a|b$, et $c|b$, alors $ac|bd$

**4.5 .** Soient $a, b, c, d$ sont quatre entiers consécutifs. Montrer que :

(a) $24|\ abcd$.

(b) $2|\ (a+b+c+d)$, mais $4 \not| (a+b+c+d)$.

**4.6 .** Soit $n > 2$ un entier. Montrer que :

(a) $n^3 - n$ est un multiple de 6.

(b) $n^5 - 5n^3 + 4n$ est un multiple de 120.

(c) $n^2(n^4-1)(n^4-16)$ est un multiple de 600.

**4.7 .** En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer $d = (a, b)$, et trouver des entiers $s, t$ tels que $d = as + bt$.

(a) $a = 14,\ b = 35$.

(b) $a = 180,\ b = 252$.

(c) $a = 1001,\ b = 7655$.

(d) $a = 1650,\ b = 780$.

(e) $a = 2873,\ b = 6643$.

**4.8 .** On a mené l'algorithme d'Euclide avec des nombres $a$ et $b$. On vous donne le dernier reste non nul, c'est à dire $(a, b)$, ainsi que les quotients successifs. Trouver les nombres $a$ et $b$ si :

(a) $(a, b) = 18$ et les quotients sont $11, 5, 11$ et 2.

(b) $(a, b) = 6$ et les quotients sont $3, 4, 5$ et 2.

**4.9 .** Montrer que pour $a, b, c$ entiers, si $a \neq 0, b \neq 0$ alors :

(a) L'équation $ax + by = c$ admet une solution en nombres entiers si et seulement si $(a, b)|c$.

(b) dans le cas où $(a, b)|c$, si $(x_0, y_0)$ est une solution, les autres sont les couples $(x, y)$ où

$$x = x_0 + k\frac{b}{(a,b)} \qquad y = y_0 - k\frac{a}{(a,b)} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

**4.10 .** Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

**4.11 .** Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier.

(a) Montrer que $p$ peut s'écrire sous la forme $p = 4k + 1$ ou $p = 4k - 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que, par contre, un nombre de la forme $4k + 1$ ou $4k - 1$ n'est pas nécessairement premier.

**4.12 .** Montrer que la congruence $2x \equiv 1 \mod 4$ n'a pas de solutions.

**4.13 .** Soit $m \geqslant 2$ un entier fixe. Montrer que si $(a, m)|b$, alors la congruence $ax \equiv b \mod m$ possède une solution, et que si $(a, m) = 1$, cette solution est unique modulo $m$,

**4.14 .** Résoudre les congruences suivantes, si elles ont de solution.

(a) $3x \equiv 2 \mod 5$

(b) $2x \equiv 7 \mod 13$

(c) $7x \equiv 10 \mod 10$

(d) $243x + 17 \equiv 101 \mod 725$

# Quelques solutions aux exercices de la série 4

**Solution de l'exercice 4.1.**

(b) Ceci est vrai. En effet, l'hypothèse revient à dire que $b = ah_1$ et $c = ah_2$ pour $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$. Ainsi, $bc = h_1h_2a^2$.

(c) Ceci est faux en général. Il suffit de prendre $\pm 1 \neq a = b = c$. On a clairement $a|b$, $a|c$, mais $a^2 \nmid bc$.

(g) C'est faux en général. Prendre $a = 4, c = 8, b = 3, d = 3$. On a bien $a|c$ et $b|d$, mais $a + b = 7$ qui n'est pas un diviseur de $11 = 8 + 3$.

**Solution de l'exercice 4.2.**

(c) Posons $H = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } n|24\}$. On vérifie aisément que

$$H = \{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

$H$ n'est stable ni pour l'addition, ni pour la soustraction. En effet, $-24, 24 \in H$, mais $(-24) + 24 = 0 \notin H$ et $(-24) - 24 = -48 \notin H$.

(d) Posons $H = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tels que } 6|n \text{ et } 24|n^2\}$.
L'ensemble $H$ est stable pour l'addition et la soustraction. En effet, soient $a, b \in H$. Alors, par définition, on a $a = 6k_1$, $b = 6k_2$, $a^2 = 24l_1$ et $b^2 = 24l_2$, pour $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$.
On vérifie alors que

$$\begin{aligned} a \pm b &= 6k_1 \pm 6k_2 \\ &= 6(k_1 \pm k_2), (k_1 \pm k_2 \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

donc, $6|(a \pm b)$.
De même,

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ &= 24l_1 \pm 2(6k_1)(6k_2) + 24l_2 \\ &= 24(l_1 \pm 3k_1k_2 + l_2), (l_1 \pm 3k_1k_2 + l_2 \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

donc, $24|(a \pm b)^2$. En conclusion, $(a \pm b) \in H$ ce qui prouve que $H$ est stable pour l'addition et la soustraction.

**Solution de l'exercice 4.3.**

(b) Pour montrer que $(a + bc, b) = (a, b)$, on montre premièrement que $(a + bc, b)|(a, b)$, puis que $(a, b)|(a + bc, b)$. Il s'en suivra que $(a + bc, b) = (a, b)$, puisque les deux sont positifs.

1. Pour montrer que $(a + bc, b)|(a, b)$, on montre que $(a + bc, b)|a$ et $(a + bc, b)|b$.
   En vertu de la définition, $(a + bc, b)|(a + bc)$ et $(a + bc, b)|b$. Donc, $a + bc = k_1(a + bc, b)$ et $b = k_2(a + bc, b)$, pour $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
   Alors,

$$\begin{aligned} a &= k_1(a + bc, b) - bc \\ &= k_1(a + bc, b) - (k_2(a + bc, b))c \\ &= (a + bc, b)(k_1 - k_2c), (k_1 - k_2c \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

d'où $(a+bc,b)|a$.
On sait déjà que $(a+bc,b)|b$, donc, en vertu de la définition de $(a,b)$, on a que $(a+bc,b)|(a,b)$.

2. Pour montrer que $(a,b)|(a+bc,b)$, on montre que $(a,b)|a+bc$ et $(a,b)|b$.
En vertu de la définition, $(a,b)|a$ et $(a,b)|b$. Donc, $a=l_1(a,b)$ et $b=l_2(a,b)$, pour $l_1,l_2\in\mathbb{Z}$.
Alors,

$$\begin{aligned} a+bc &= l_1(a,b)+l_2(a,b)c \\ &= (a,b)(l_1+l_2c),(l_1+l_2c\in\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

d'où $(a,b)|(a+bc)$.
On sait déjà que $(a,b)|b$, donc, en vertu de la définition de $(a+bc,b)$, on a que $(a|b)|(a+bc,b)$. La preuve s'achève.

**Solution de l'exercice 4.4.**

(a) On a, par définition, que $c=k_1a$ et $c=k_2b$, pour $k_1k_2\in\mathbb{Z}$. En vertu de la relation de Bézout-Bachet,

$$(a,b)=1 \text{ implique qu'il existe } s,t\in\mathbb{Z} \text{ tels que } 1=sa+tb.$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par $c$, on obtient

$$\begin{aligned} c &= sac+tbc \\ &= sa(k_2b)+tb(k_1a) \\ &= ab(sk_2+tk_1),(sk_2+tk_1\in\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

d'où $ab|c$.

**Solution de l'exercice 4.6.**

(a) On a $n^3-n=n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)$, qui est le produit de trois nombres successifs. Un d'eux doit être multiple de 2 et un autre un multiple de 3.

(b) Utiliser le fait que $n^5-5n^3+4n)=n(n-2)(n+2)(n-1)(n+1)$

**Solution de l'exercice 4.7.**

(b) On effectue la suite de divisions :

$$252=180(1)+72 \tag{1}$$
$$180=72(2)+36 \tag{2}$$
$$72=36(2). \tag{3}$$

Le dernier reste non nul est 36, ainsi $(180,252)=36$.
Pour trouver $s,t$ tels que désirés, on remonte l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{aligned} 36 &= 180-72(2) && \text{(de (2))} \\ &= 180-(252-180(1))(2) && \text{(de (1))} \\ &= 180(3)+252(-2). \end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 4.9.**

**(a)** Soit $d = (a, b)$.

**Nécessité** Si $c = ax + by$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$, on a que $c \in d\mathbb{Z}$ (voir la preuve de l'existence du p.g.c.d, au besoin)

**Suffisance** Si $d|c$, cela veut dire que $c \in d\mathbb{Z}$, de sorte qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $c = ax+by$.

**(b)** Il est immédiat de montrer que $x, y$ tels que donnés sont une solution.

Pour voir que toutes les solutions sont de cette forme, supposons que $x, y$ en soit une autre. Aussi, soient $a', b'$ tels que $a = da'$, $b = db'$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ ax_0 + by_0 &= c \end{aligned}$$

ce qui, après soustraction donne

$$\begin{aligned} 0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) \\ &= da'(x - x_0) + db'(y - y_0) \\ &= a'(x - x_0) + b'(y - y_0) \end{aligned}$$

Ainsi, $b'|a'(x - x_0)$. Comme $(a', b') = 1$ (suit de la définition de $d, a'$ et $b'$), ceci donne bien que $b'|(x - x_0)$, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = kb'$, c'est à dire $x = x_0 + kb'$. Remplaçant, ceci donne

$$a'b'k + b'(y - y_0) = 0$$

ou encore $ka' + y - y_0 =$ et le résultat suit.

**Solution de l'exercice 4.11.**

(a) Soit $p$ un nombre premier. Le reste de sa division par 4 :
- — Ne peut pas être 0, sinon, $p$ serait un multiple de 4,
- — Peut être 1, et dans ce cas, $p = 4k + 1$,
- — Ne peut pas être 2 car dans ce cas on aurait $p = 4k + 2$, qui est un nombre pair,
- — Peut être 3, et dans ce cas on a $p = 4h + 3 = 4h + 4 - 1 = 4(h + 1) - 1$.

(b) Suffit de prendre $k = 5$ et on a $4k + 1 = 21$ qui n'est pas premier. De même avec $k = 4$ on a $4k - 1 = 15$ qui n'est pas premier.

**Solution de l'exercice 4.14.**

(b) Il suffit de trouver, grâce à l'algorithme d'Euclide et le théorème de Bézout, l'inverse de 2 modulo 13. Un calcul direct donne que cet inverse est 7, car $2 \times 7 = 14 \equiv 1 \mod 13$. Ansi $2x \equiv 7 \mod 13$ donne $7 \cdot 2x \equiv 7 \cdot 7 \mod 13$, c'est à dire $x \equiv 10$.

# 5 Relations et fonctions

**5.1 .** Étudiez les relation suivantes du point de vue de la transitivité, la symétrie, l'antisymétrie, et la réflexivité.

(a) Sur $\mathbb{Z}$, on définit $\sim$ par $x \sim y$ si et seulement si $x = y^2$.

(b) Sur $\mathbb{N}$ on définit $\sim$ par $x \sim y$ si et seulement si $3|(x + 2y)$.

(c) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère la droite $d$ d'équation $x+y = 1$, et on définit la relation $\sim_d$(sur $\mathbb{R}^2$) au moyen de $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si et seulement si $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) \in d$.

(d) Sur l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des droites du plan on considère la relation de perpendicularité, $\perp$.

(e) Sur l'ensemble $\mathcal{D}_3$ des droites de l'espace on considère la relation de perpendicularité, $\perp$

(f) Sur l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des droites du plan on considère la relation de parallélisme, $\|$.

(g) Sur l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des droites du plan on considère la relation $\sim$ définie par $d_1 \sim d_2$ si et seulement si $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$

(h) Sur l'ensemble $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on définit la relation $\sim$ par $A \sim B$ si et seulement si $A \subseteq B \cup \mathbb{Z}$

**5.2.** Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations sur un ensemble $X$. On vous demande de déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux. S'ils sont vrais, fournissez une preuve, sinon, un contre-exemple.

(a) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives, alors $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ l'est aussi.

(b) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ l'est aussi.

(c) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symmétriques, alors $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ l'est aussi.

(d) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont antisymétriques, alors $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ l'est aussi.

(e) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives, alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ l'est aussi.

(f) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ l'est aussi.

(g) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symmétriques, alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ l'est aussi.

(h) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont antisymétriques, alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ l'est aussi.

(i) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ l'est aussi.

(j) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ l'est aussi.

(k) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symmétriques, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ l'est aussi.

(l) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont antisymétriques, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ l'est aussi.

(m) Si $\mathcal{R}$ est transitive, alors $R^{-1}$ l'est aussi.

(n) Si $\mathcal{R}$ est réflexive, alors $R^{-1}$ l'est aussi.

(o) Si $\mathcal{R}$ est symétrique, alors $R^{-1}$ l'est aussi.

(p) Si $\mathcal{R}$ est antisymétrique, alors $R^{-1}$ l'est aussi.

**5.3 .** Étant donné un ensemble $X$, on définit et $\Delta = \{(x, x)|\ x \in X\}$ (on appelle $\Delta$ la diagonale)

(a) Démontrer qu'une relation $\mathcal{R}$ de $X$ dans $X$ est symétrique si et seulement si $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

*i.* Si $X$ est fini, et $M_{\mathcal{R}}$ est la matrice représentant $\mathcal{R}$, que peut-on dire de $M_{\mathcal{R}}$ ?

   *ii*. Si $X = \mathbb{R}$, que peut-on dire du graphe de $\mathcal{R}$ ?

(b) Démontrer qu'une relation $\mathcal{R}$ de $X$ dans $X$ est réflexive si et seulement si $\Delta \subseteq \mathcal{R}$.
   *i*. Si $X$ est fini, et $M_{\mathcal{R}}$ est la matrice représentant $\mathcal{R}$, que peut-on dire de $M_{\mathcal{R}}$ ?
   *ii*. Si $X = \mathbb{R}$, que peut-on dire du graphe de $\mathcal{R}$ ?

(c) Démontrer qu'une relation $\mathcal{R}$ de $X$ dans $X$ est antisymétrique si et seulement si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta$.
   *i*. Si $X$ est fini, et $M_{\mathcal{R}}$ est la matrice représentant $\mathcal{R}$, que peut-on dire de $M_{\mathcal{R}}$ ?
   *ii*. Si $X = \mathbb{R}$, que peut-on dire du graphe de $\mathcal{R}$ ?

(d) Démontrer qu'une relation $\mathcal{R}$ de $X$ dans $X$ est antisymétrique et symétrique si et seulement si $\mathcal{R} \subseteq \Delta$.
   *i*. Si $X$ est fini, et $M_{\mathcal{R}}$ est la matrice représentant $\mathcal{R}$, que peut-on dire de $M_{\mathcal{R}}$ ?
   *ii*. Si $X = \mathbb{R}$, que peut-on dire du graphe de $\mathcal{R}$ ?

**5.4.** On considère la relation $\mathcal{R}$ : “strictement plus petit que”

(a) Décrivez la relation $\mathcal{R}^2$ sur $\mathbb{R}$

(b) Même question, mais sur $\mathbb{Z}$ cette fois.

**5.5.** Pour chacune des relations $\mathcal{R}$ suivantes, décrivez la relation $\mathcal{R}^2$.

(a) Sur l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des droites du plan on considère la relation de perpendicularité, $\perp$.

(b) Sur l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des droites du plan on considère la relation deparallélisme usuel, $\|$.

(c) Sur $\mathbb{Z}$, on considère la relation de divisibilité.

(d) Sur $\mathbb{Z}$ on considère la relation de congruence modulo un entier $n$.

**5.6.** On considère des fonctions $f, g, h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire.

(a) Montrez que $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$, et donnez un exemple montrant qu'en général $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$.

(b) Montrez que $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$, et donnez un exemple montrant qu'en général $f \circ (g \cdot h) \neq (f \circ g) \cdot (f \circ h)$.

(c) Montrez que $c(f \circ g) = (cf) \circ g$, et donnez un exemple montrant qu'en général $f \circ (cg)$ diffère de $c(f \circ g)$.

**5.7 .** Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux équivalences sur un ensemble $X$. Déterminer lesquelles des relations suivantes sont des équivalences. Justifier.

(a) $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

(b) $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

(c) $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$.

(d) $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$

**5.8.** Soit $\mathbb{R}$ une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ telle que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, si $|a - b| \in \{3, 4\}$, alors $a\mathcal{R}b$. Est-ce que $\mathcal{R}$ est nécessairement une relation d'équivalence ?

**5.9 .** Une *congruence* sur $\mathbb{Z}$ est une relation $\sim$ telle que pour tous $a, x, y \in \mathbb{Z}$, si $x \sim y$ alors $x + a \sim y + a$.

(a) Soit $n \in \mathbb{Z}_*$. On considère la *congruence modulo* $n$ usuelle. S'agit-il d'une congruence sur $\mathbb{Z}$ ?

(b) Montrer que toute congruence sur $\mathbb{Z}$ est soit une congruence modulo $n$ pour un $n$ convenable, soir la relation diagonale $\Delta = \{(a, a) | a \in \mathbb{Z}\}$

(c) Dans la définition de *congruence* on remplace la condition additive "$x + a \sim y + a$" par une condition multiplicative "$ax \sim ay$". La notion associée est appelée une *congruence multiplicative*. Est-ce que la relation de congruence modulo $n$ (usuelle) est une congruence multiplicative ? Est-ce vrai que toute congruence multiplicative est une cognruence modulo $n$ ou la relation diagonale $\Delta$ ?

**5.10.** Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $x \mapsto \frac{x-1}{x}$ est bijective et construire sont inverse.

**5.11 .** Trouver des bijections entre les ensembles $X$ et $Y$ lorsque :

(a) $X$ et $Y$ sont les intervalles $X = [0, 1],\ Y = ]0, 1]$

(b) $X = \mathbb{Q}$ et $Y = \mathbb{Q}_*^+$

(c) $X = [0, 2\pi[$ et $Y = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a^2 + b^2 = 1\}$

(d) $X = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $Y = \mathbb{R}$

(e) $X = [a, b]$ et $Y = [c, d]$, où $a, b, c$ et $d$ sont des nombres réels vérifiant $a < b$ et $c < d$.

**5.12 .** Soit $E$ un ensemble et $\mathbb{2} = \{0, 1\}$. Pour une partie $A \subseteq E$ on définit $\chi_A : E \to \mathbb{2}$ au moyen de

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

(a) Montrer que $\chi_{E \setminus A} = 1 - \chi_A$.

(b) Montrer que $A = B$ si et seulement si $\chi_A = \chi_B$.

(c) Montrer que $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

(d) Montrer que $\chi_{A \cup b} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$

(e) Soit $\mathbb{2}^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans l'ensemble $\mathbb{2}$. Construisez une bijection entre $\mathbb{2}^E$ et $\mathcal{P}(E)$. Déduisez la cardinalité de $\mathbb{2}^E$.

**5.13 .** Soient $X, Y$ deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Pour un sous-ensemble $Y'$ de $Y$, on définit sa pré-image par $f$ comme $f^{-1}(Y') = \{x \in X | f(x) \in Y'\}$.

*Mise en garde :* L'utilisation du symbole $f^{-1}$ est une convention de notation, ceci ne présuppose pas que $f$ est inversible.

Montrer que :

(a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

(b) Si $Y_1' \subseteq Y_2'$, alors $f^{-1}(Y_1') \subseteq f^{-1}(Y_2')$,

(c) Pour tous $Y_1',\ Y_2' \subseteq Y$ on a $f^{-1}(Y_1' \cup Y_2') = f^{-1}(Y_1') \cup f^{-1}(Y_2')$
(d) Pour tous $Y_1',\ Y_2' \subseteq Y$ on a $f^{-1}(Y_1' \cap Y_2') = f^{-1}(Y_1') \cap f^{-1}(Y_2')$
(e) Pour tout $Y' \subseteq Y$ on a $f^{-1}(Y \setminus Y') = X \setminus f^{-1}(Y')$

**5.14.** Soient $X, Y$ deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Pour un sous-ensemble $X'$ de $X$, on définit son image par $f$ comme $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$. Montrer que :
(a) $f(\emptyset) = \emptyset$
(b) Si $X_1' \subseteq X_2'$, alors $f(X_1') \subseteq f(X_2')$,
(c) Pour tous $X_1',\ X_2' \subseteq X$ on a $f(X_1' \cup X_2') = f(X_1') \cup f(X_2')$
(d) Pour tous $X_1',\ X_2' \subseteq X$ on a $f(X_1' \cap X_2') \subseteq f(X_1') \cap f(X_2')$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

**5.15.** Soient $X, Y$ deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Montrer que :
(a) Pour tout $Y' \subseteq Y,\ f(f^{-1}(Y')) \subseteq Y'$ et fournir un exemple où l'inclusion est stricte.
(b) $f$ est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(Y')) = Y'$ pour tout $Y' \subseteq Y$.
(c) Pour tout $X' \subseteq X,\ f(f^{-1}(X')) \subseteq X'$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
(d) $f$ est injective si et seulement si $f(f^{-1}(X')) = X'$ pour tout $X' \subseteq X$.

## Quelques solutions aux exercices de la série 5

**Solution de l'exercice 5.1.**

(a) La relation n'est pas réflexive, symétrique ni transitive (on trouve facilement des contre-exemples). La relation est antisymétrique : Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \sim y$ et $y \sim x$. La définition de la relation donne que $x = y^2$ et $y = x^2$. On substitue pour obtenir que $x = x^4$, donc $x = y = 0$ ou $x = y = 1$.

(d) Non réflexive, symétrique, non antisymétrique, non transitive.

(f) Réflexive, symétrique, non antisymétrique, transitive.

(g) Réflexive, symétrique, non antisymétrique, non transitive.

(h) La relation est ni symétrique ni antisymétrique. Elle est réflexive : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$A \subseteq A \cup \mathbb{Z} \Longrightarrow A \sim A.$$

Elle est transitive : Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $A \sim B$, $B \sim C$. La définition de la relation donne que $A \subseteq B \cup \mathbb{Z}$ et $B \subseteq C \cup \mathbb{Z}$. Mais alors, $A \subseteq C \cup \mathbb{Z}$, d'où $A \sim C$.

**Solution de l'exercice 5.2.**

(a) Faux. Posons $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$, $\mathcal{S} = \{(2, 1)\}$ trivialement transitives. Alors, $(1, 2) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, $(2, 1) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, mais $(1, 1) \notin \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

(d) Faux.

(e) Vrai. Soient $x(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y$ et $y(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})z$. Alors, $x\mathcal{R}z$ et $x\mathcal{S}z \Longrightarrow x(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})z$.

(g) Vrai.

(j) Vrai.

(m) Vrai.

(p) Vrai.

**Solution de l'exercice 5.3.**

(a) Soit $\mathcal{R}$ symétrique. Soit $(x, y) \in \mathcal{R}$. La symétrie donne que $(y, x) \in \mathcal{R}$, ce qui, par définition, veut dire que $(x, y) \in \mathcal{R}^{-1}$. Soit maintenant $(a, b) \in \mathcal{R}^{-}1$. En vertu de la définition, $(b, a) \in \mathcal{R}$. La symétrie donne que $(a, b) \in \mathcal{R}$, donc que $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$. Ainsi, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-}1$.
Supposons maintenant que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-}1$ et soit $(x, y) \in \mathcal{R}$. L'égalité donne que $(x, y) \in \mathcal{R}^{-1}$, soit que $(y, x) \in \mathcal{R}$. La relation $\mathcal{R}$ est ainsi symétrique.

i. La matrice est symétrique ($M^t_{\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}}$).

ii. Le graphe est symétrique par rapport à la droite $y = x$.

(c) Soit $\mathcal{R}$ antisymétrique. Soit $(x, y) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$. Puisque $(x, y) \in \mathcal{R}^{-1}$, $(y, x) \in \mathcal{R}$. Mais alors, l'antisymétrie donne que $x = y$, donc $(x, y) = (x, x) \in \Delta$. Ainsi, $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta$.
Supposons maintenant que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta$ et soient $(x, y) \in \mathcal{R}$, $(y, x) \in \mathcal{R}$. On a, en vertu de la définition, que $(x, y) \in \mathcal{R}^{-}1$, d'où $(x, y) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ et l'hypothèse donne que $(x, y) \in \Delta$. Ainsi, $x = y$ et $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

i. Si $[M\mathcal{R}]_{ij} = 1$, $[M\mathcal{R}]_{ji} = 0$.

ii. Les graphes de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1}$ ne s'intersectent qu'en $y = x$.

**Solution de l'exercice 5.4.**

(a) On prétend que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^2$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) \in \mathcal{R}$. Alors, $\dfrac{x+y}{2} \in \mathbb{R}$ est tel que $\left(x, \dfrac{x+y}{2}\right) \in \mathcal{R}$ et $\left(\dfrac{x+y}{2}, y\right) \in \mathcal{R}$. D'où, $(x, y) \in \mathcal{R}^2$. L'inclusion réciproque suit directement de la transitivité de $\mathcal{R}$.

**Solution de l'exercice 5.5.**

(d) On prétend que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^2$. L'inclusion $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^2$ suit de la réflexivité de $\mathcal{R}$, tandis que l'inclusion réciproque suit de la transitivité de $\mathcal{R}$.

**Solution de l'exercice 5.6.**

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}((f+g)\circ h)(x) &= (f+g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f\circ h)(x) + (g\circ h)(x),\end{aligned}$$

d'où l'énoncé.
Montrons maintenant que $f \circ (g+h) \neq f\circ g + f \circ h$.
Posons $f(x) = x^2$, et $g(x) = h(x) = x$ et considérons $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}(f\circ(g+h))(x_0) &= f(g(x_0) + h(x_0)) \\ &= f(1+1) = 2^2,\end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned}(f\circ g + f\circ h)(x_0) &= f(g(x_0)) + f(h(x_0)) \\ &= f(1) + f(1) = 2.\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 5.8.** Oui.

La relation est réflexive :

Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a que $|x - (x+3)| = 3 \Longrightarrow x\mathcal{R}(x+3)$ et $|(x+3) - x| = 3 \Longrightarrow (x+3)\mathcal{R}x$. Il suit de la transitivité de $\mathcal{R}$ que $x\mathcal{R}x$.

La relation est symétrique : Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$. Posons $y = x + k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

On montre que $x + k\mathcal{R}x$ par récurrence sur $k$. La base ($k = 0$) suit de la réflexivité. Supposons que $x+k-1\mathcal{R}x$. Alors, $|(x+k+3)-(x+k-1)| = 4 \Longrightarrow (x+k-3)\mathcal{R}(x+k-1)$ et $|(x+k)-(x+k-3)| = 3 \Longrightarrow (x+k)\mathcal{R}(x+k-3)$. Le résultat suit de la transitivité. On montre le résultat de manière similaire pour $k < 0$.

La relation étant transitive par hypothèse, c'est une relation d'équivalence.

**Solution de l'exercice 5.9.**

(a) Oui. Soient $2 < n \in \mathbb{N}$, $a, x, y \in \mathbb{Z}$ et $x \equiv y(\mod n)$. Alors $(x+a) - (y+a) = x - y \in n\mathbb{Z} \Longrightarrow (x+a) \equiv (y+a)(\mod n)$.

**Solution de l'exercice 5.10.** On vérifie que l'inverse est $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\} : x \longmapsto \frac{-1}{x-1}$. Comme la fonction $f$ est inversible, elle est bijective.

**Solution de l'exercice 5.11.**

(a) On vérifie que

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow ]0,1] \\ x &\longmapsto \begin{cases} 2^{-1} & x = 0 \\ 2^{-(n+1)} & x = 2^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}_*) \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est bijective.

**Solution de l'exercice 5.12.**

(e) La bijection recherchée est $\phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow 2^E : A \longmapsto \chi_A$. On a donc $|2^E| = |\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

**Solution de l'exercice 5.13.**

(b) Soient $Y_1' \subseteq Y_2' \subseteq Y$ et $x \in f^{-1}(Y_1')$. En vertu de la définition, $f(x) \in Y_1'$. Mais alors, $f(x) \in Y_2'$ et $x \in f^{-1}(Y_2')$.

**Solution de l'exercice 5.14.**

(d) Soient $X_1', X_2' \subseteq X$ et $y \in f(X_1' \cap X_2')$. En vertu de la définition, il existe un $x \in X_1' \cap X_2'$ tel que $f(x) = y$. Mais, $x \in X_1'$ implique que $y = f(x) \in f(X_1')$ et $x \in X_2'$ implique que $y = f(x) \in f(X_2')$, d'où $y \in f(X_1') \cap f(X_2')$.
Considérons $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction valeur absolue. Posons $X_1' = \{1\}$ et $X_2' = \{-1\}$. Alors $X_1' \cap X_2' = \emptyset$, $f(X_1') = \{1\} = f(X_2')$ et $f(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \{1\} = f(X_1') \cap f(X_2')$.

**Solution de l'exercice 5.15.**

(a) Soit $Y' \subseteq Y$ et $y \in f(f^{-1}(Y'))$. En vertu de la définition, il existe un $x \in f^{-1}(Y')$ tel que $f(x) = y$. De plus, $x \in f^{-1}(Y')$ implique que $f(x) \in Y'$, d'où $y \in Y'$.
Considérons la fonction $\cdot 2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la multiplication par 2 et $3\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de 3. Alors, $\cdot 2^{-1}(3\mathbb{N}) = 3\mathbb{N}$ implique que $\cdot 2(\cdot 2^{-1}(3\mathbb{N})) = 6\mathbb{N} \subsetneq 3\mathbb{N}$.

(b) ($\Longrightarrow$) Supposons $f$ surjective. Nous avons montré en (a) que $f(f^{-1}(Y')) \subseteq Y'$ pour tout $Y' \subseteq Y$. Soit maintenant $y \in Y'$. En vertu de l'hypothèse, il existe un $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Par définition, $x \in f^{-1}(Y')$, d'où $y \in f(f^{-1}(Y'))$.
($\Longleftarrow$) Trivial en prenant $Y' = Y$.

## Relations et fonctions (bis) : cardinalité

**5.16.** Quelle est la cardinalité de l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ à extrémités rationnelles ?

**5.17.** Déterminez si les ensembles suivants sont dénombrables :
(a) L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, qu'on note $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.
(b) L'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$.

**5.18.** Pour $x, y \in \mathbb{R}$,on pose $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.
(a) Montrez que $\sim$ est une équivalence sur $\mathbb{R}$.
(b) Déterminez le cardinal de chaque classe d'équivalence, ainsi que celui du quotient $\mathbb{R}/\sim$.

**5.19.** Trouvez le cardinal des ensembles suivants :
(a) L'ensemble $\mathcal{C}$ des cercles du plan ;
(b) L'ensemble $\mathcal{T}$ des triangles non dégénérés du plan ;
(c) L'ensemble $\mathcal{D}$ des droites du plan.
(d) L'ensemble des suites de nombres rationnels.

**5.20.**
(a) Montrez que deux fonctions continues $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont égales si et seulement si $f_1(r) = f_2(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$
(b) Déterminez la cardinalité de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(c) Quelle est la cardinalité de l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?

**5.21.** Établissez les propriétés suivantes des nombres cardinaux :
(a) Pour tous $\alpha, \beta$ on a $\alpha \leq \alpha + \beta$
(b) Si $\alpha \leq \beta$, alors $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Est-ce qu'on peut remplacer l'inégalité ample par une inégalité stricte ?
(c) Si $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \delta$, alors $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$.
(d) Si $\alpha \leq \beta$, alors $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ et $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$. Est-ce que $\alpha < \beta$, entraîne $\alpha\gamma < \beta\gamma$ ?
(e) $\alpha \leq \beta$ si et seulement s'il existe un cardinal $\gamma$ tel que $\alpha + \gamma = \beta$.

**5.22.** Démontrez que :
(a) $\alpha < \aleph_0$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$ ;
(b) $n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ;
(c) $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ;
(d) $\aleph_0^n = \aleph_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ ;

**5.23.** Partant de l'intervalle $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, on enlève l'intervalle central $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ ; des deux intervalles restant, on enlève les tiers centraux, c'est à dire $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ et $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$. On repète le même procédé indéfiniment, en enlevant le tiers central de chaque intervalle qui reste. L'ensemble de tous les réels de $[0,1]$ qui restent est appelé *l'ensemble de Cantor*. On se propose de trouver son cardinal.

(a) Il est clair que les points extrêmes des intervalles, à savoir $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ appartiennent à l'ensemble de Cantor. Utilisez ceci pour établir que $C$ est au moins dénombrable.

(b) Montrez que $\frac{1}{4} \in C$, bien que $\frac{1}{4}$ ne soit pas un point d'extrémité des sous intervalles.

(c) Afin de montrer que la cardinalité de $C$ est $c$, la cardinalité du continu, il suffit d'exhiber une injection $f : [0,1[ \to C$. Pour ceci, caractérisez au moyen de l'expression en base 3, les éléments de $C$.

(d) Utilisez l'expression en base 2 des réels de $[0,1[$, puis "doublez chaque chiffre" pour obtenir l'application cherchée (montrez que tout fonctionne). Concluez.

(e) Quelle est a longueur totale des intervalles qui ont été enlevés ? Commentez.

**5.24.** Soient $\alpha = |A|$ et $\beta = |B|$ deux cardinaux, pas nécessairement finis. On peut supposer sans perte de généralité de $A \cap B = \emptyset$. On définit leur somme $\alpha + \beta$ comme la cardinalité de l'ensemble $A \cup B$. De façon analogue, on définit leur produit, $\alpha\beta$ comme la cardinalité du produit cartésien $A \times B$. De même, on définit $\alpha^\beta$ comme la cardinalité de l'ensemble $A^B := \{f : B \to A\}$, c'est à dire l'ensemble de toutes les applications de $B$ vers $A$. Si $\alpha, \beta$ et $\gamma$ sont des cardinaux, démontrez que :

(a) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;

(b) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;

(c) $\alpha\beta = \beta\alpha$ ;

(d) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ ;

(e) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ;

(f) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \, \alpha^\gamma$ ;

(g) $\alpha^\gamma \beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$ ;

(h) $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ ;

# 6 Combinatoire

**6.1 .** Quinze femmes peuvent représenter le Canada à la course à relais à quatre. De combien de façons peut-on choisir l'ordre des quatre participantes à la course ?

**6.2.** Dans un état américain, les plaques sont composées de six lettres. Les policiers veulent identifier l'auteur d'un crime, et ils savent que sa plaque contenait exactement trois "A" (non nécessairement consécutifs). Combien de plaques différentes correspondent à cette description ?

**6.3 .** Dans un autre état américain, les plaques sont composées de six lettres distinctes. Combien de plaques sont en ordre alphabétique ?

**6.4 .** Au Québec, les plaques sont composées de trois lettres, puis trois chiffres ou de trois chiffres, puis trois lettres. Combien de plaques sont telles que les lettres soient distinctes et en ordre alphabétique et les chiffres distincts et en ordre numérique ?

**6.5 .** On roule un dé standard cinq fois et note les résultats dans l'ordre. Combien y a-t-il de résultats où

(a) Les nombres ne se répètent pas ?

(b) Il y a exactement deux 6 ?

(c) Un nombre apparaît trois fois et un autre (différent), deux fois ?

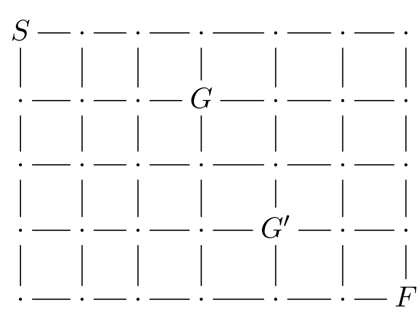
**6.6 .** On roule quatre dés standards simultanément et on note le résultat. Combien y a-t-il de résultats où

(a) Les nombres forment une suite (ex. : $2 - 3 - 4 - 5$) ?

(b) Tous les nombres sont distincts ?

(c) Il y a exactement une paire ?

**6.7 .** Dans la grille suivante, le point E est un centre d'expédition de colis et le point $F$ est une ferme qui attend un colis d'engrais. Les points $G$ et $G'$ sont des stations d'essence. Les camions partant de $E$ doivent être efficaces, c'est-à-dire ne jamais aller vers le haut ou vers la gauche.



(a) Combien y a-t-il de chemins efficaces du centre d'expédition à la ferme (on ignore les stations) ?

(b) Combien y a-t-il de chemins efficaces du centre d'expédition à la ferme en allant mettre de l'essence à la station $G'$ ?

(c) Combien y a-t-il de chemins efficaces du centre d'expédition à la ferme en allant mettre de l'essence à la station $G$ **et** à la station $G'$ ?

(d) Combien y a-t-il de chemins efficaces du centre d'expédition à la ferme en allant mettre de l'essence à la station $G$ **ou** à la station $G'$ ?

**6.8.** Un sac contient 3 billes rouges, 2 blanches et 4 bleues. On pige 4 billes au hasard. Quelle est la probabilité de choisir au moins une bille de chaque couleur ? (Rappel : Cette probabilité correspond au quotient du nombre de façons de choisir quatre billes ainsi par le nombre de façons de choisir 4 billes au total.)

**6.9.** Au poker à cinq cartes, combien y a-t-il de façons d'obtenir les mains suivantes ?

(a) Une couleur ?

(b) Une main pleine ?

(c) Une quinte en rouge ?

(d) Une main meilleure qu'une paire de dix ?

**6.10.** On roule 5 dés identiques simultanément. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

**6.11.** Le directeur des résidences doit assigner 15 résidents à quatre résidences : $G-1, G-2, G-3$ et $G-4$. Il y a 5 places au $G-1$, 4 places au $G-2$, 3 places au $G-3$ et 3 places au $G-4$.

(a) De combien de façons différentes peut-il tous les assigner ?

(b) Si un résident, Roger, exige d'être au $G-1$, de combien de façons différentes peut-il tous les assigner ?

(c) Si Roger exige plutôt de ne pas être au $G-3$ ni au $G-4$, de combien de façons différentes peut-il tous les assigner ?

## Réponses aux exercices de la série 6

**Solution de l'exercice 6.1.** Il y a $\frac{15!}{11!}$ façons de choisir ces quatre femmes.

**Solution de l'exercice 6.2.** Il y a $25^3\binom{6}{3}$ telles plaques.

**Solution de l'exercice 6.3.** Il y a $\binom{26}{6}$ telles plaques.

**Solution de l'exercice 6.4.** Il y a $2\binom{26}{3}\binom{10}{3}$ telles plaques.

**Solution de l'exercice 6.5.**

(a) $6!$

(b) $\binom{5}{2}5^3$

(c) $\binom{5}{3} \cdot \frac{6!}{4!}$

**Solution de l'exercice 6.6.**

(a) 3

(b) $\binom{6}{4}$

(c) $\binom{6}{1}\binom{5}{2}$

**Solution de l'exercice 6.7.**

(a) 210

(b) 105

(c) 36

(d) 149

**Solution de l'exercice 6.9.**

(a) 5108

(b) 3744

(c) 300

(d) 536 100

**Solution de l'exercice 6.8.** La probabilité est $\frac{4}{7}$.

**Solution de l'exercice 6.10.** Il y a 252 résultats possibles.

**Solution de l'exercice 6.11.**

(a) $\binom{15}{5}\binom{10}{4}\binom{6}{3}$

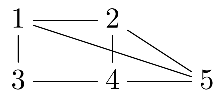
(b) $\binom{14}{4}\binom{10}{4}\binom{6}{3}$

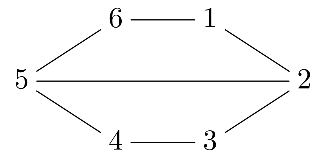
(c) On reformule : Roger doit être au G-1 ou au G-2.
Il a $\binom{14}{5}\binom{9}{3}\binom{6}{3}$ façons de l'assigner au G-2. Le résultat final est donc :

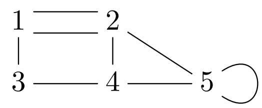
$$\binom{14}{4}\binom{10}{4}\binom{6}{3} + \binom{14}{5}\binom{9}{3}\binom{6}{3}.$$

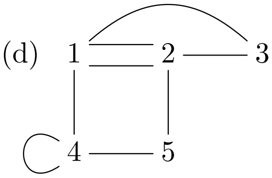
# 7 Graphes

**7.1.** Dire, en justifiant, si les graphes suivants admettent un chemin eulérien ou un cycle eulérien.

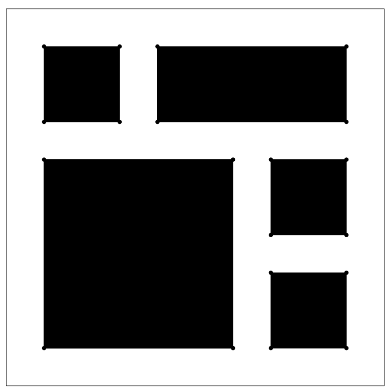
(a)



(c)



(b)


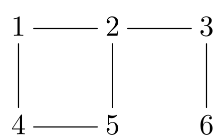

(d)


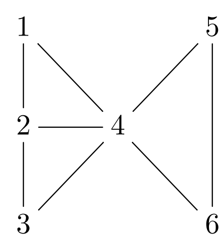

**7.2.** Un nettoyeur de trottoirs doit passer des deux côtés de chaque rue du voisinage illustré ci-bas (les rues sont en blanc). Il désire le faire de façon efficace, c'est-à-dire sans revenir sur ses pas. Donnez une solution au nettoyeur de trottoirs.

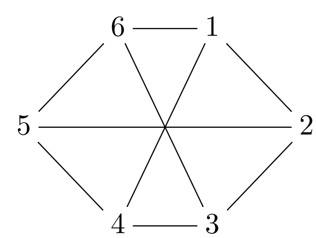


**7.3.** Le travail d'un concierge requiert de nettoyer, puis de cirer tous les corridors d'un étage. Pour ce faire, il doit arriver de l'ascenseur, s'assurer de nettoyer un corridor avant de le cirer, s'assurer de ne pas marcher sur un plancher qu'il a ciré puis, lorsqu'il a fini, quitter par le même ascenseur. Prouver que, peu importe comment l'étage est construit, il est toujours possible pour le concierge de bien faire son travail.

**7.4.** Trouver le nombre chromatique des graphes suivants.

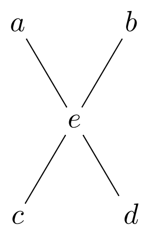
(a)



(b)


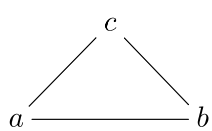

(c)


**7.5.** Parmi les graphes suivants, déterminer ceux qui sont bipartis :

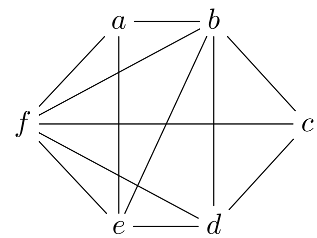
(a)



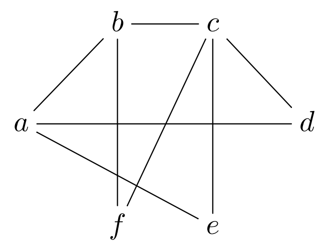

(b)




(c)




(d)



## Réponses aux exercices de la série 7

**Solution de l'exercice 7.1.**

(a) Aucun des deux, puisque quatre sommets sont de degrés impairs.

(b) Le graphe admet un chemin eulérien.

(c) Le graphe admet un chemin eulérien.

(d) Le graphe admet un cycle eulérien.

**Solution de l'exercice 7.2.** Construire un graphe dont les sommets sont les intersections (12 sommets) et les arêtes représentent les côtés des rues. Ce graphe est eulérien, on peut donc trouver une solution au problème du nettoyeur.

**Solution de l'exercice 7.3.** Pour un étage donné, on construit un graphe où les intersections de corridors et l'ascenseur sont des sommets et les corridors sont des arêtes doubles (puisque le concierge doit passer pour nettoyer, puis pour cirer). Comme chaque sommet a un degré pair, le graphe est euérien et le concierge peut faire son travail !

**Solution de l'exercice 7.4.**

(a) Le nombre chromatique est 2.

(b) Le graphe a un sous-graphe complet à 3 sommets, donc le nombre chromatique est plus grand ou égal à 3. On trouve facilement un coloriage qui prouve que le nombre est en fait 3.

(c) Le nombre chromatique est 2.