

# L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X — Sage i SageT<sub>E</sub>X

Ivica Nakić  
nakic@math.hr

Matematički odsjek Prirodoslovno–matematičkog fakulteta

Matematički softver, 2016/17

1 Sage

2 Sage $\text{\TeX}$

# Što je Sage?

**Sage** je matematička aplikacija sa sučeljem u programskom jeziku Python. Sage u sebi sadrži cijeli niz biblioteka (napisanih u raznim programskim jezicima) za razna područja matematike. Python biblioteke koje smo dosad obradili (Numpy, Scipy, Matplotlib, Sympy, Cython) su također ugrađene, ali unutar Sagea imamo pristup i R-u, Fortranu, C-u, C++-u, . . .

# Što je Sage?

**Sage** je matematička aplikacija sa sučeljem u programskom jeziku Python. Sage u sebi sadrži cijeli niz biblioteka (napisanih u raznim programskim jezicima) za razna područja matematike. Python biblioteke koje smo dosad obradili (Numpy, Scipy, Matplotlib, Sympy, Cython) su također ugrađene, ali unutar Sagea imamo pristup i R-u, Fortranu, C-u, C++-u, . . . Sadrži biblioteke za algebru, algebarsku geometriju, aritmetičku geometriju, diferencijalni i integralni račun, kombinatoriku, linearnu algebru, teoriju grafova, teoriju grupa, teoriju brojeva, . . .

# Što je Sage?

**Sage** je matematička aplikacija sa sučeljem u programskom jeziku Python. Sage u sebi sadrži cijeli niz biblioteka (napisanih u raznim programskim jezicima) za razna područja matematike. Python biblioteke koje smo dosad obradili (Numpy, Scipy, Matplotlib, Sympy, Cython) su također ugrađene, ali unutar Sagea imamo pristup i R-u, Fortranu, C-u, C++-u, . . . Sadrži biblioteke za algebru, algebarsku geometriju, aritmetičku geometriju, diferencijalni i integralni račun, kombinatoriku, linearnu algebru, teoriju grafova, teoriju grupa, teoriju brojeva, . . . Sage je nastao 2005. godine, trenutno je u 7.6 inačici.

# Python vs. Sage

Iako u Sageu programiramo u Pythonu, postoje dvije razlike koje treba držati na umu:

- potenciranje se može pisati i pomoću simbola  $\wedge$  (xor operacija se piše  $s \wedge \wedge$ ),
- Sage koristi Python 2, mi inače radimo u Pythonu 3 (no dijeljenje integera funkcionira kao u Pythonu 3).

Ove razlike su dobijene korištenje pre-parsera.

# Sage kao kalkulator

Neki jednostavni primjeri koda u Sageu:

```
4 * (10 // 4) + 10 % 4 == 10
3^2*4 + 2%5
sqrt(3.4)
sin(pi/3)
exp(2)
sin(10).n(digits=5)
N(sin(10),digits=10)
sqrt(pi).numerical_approx()
numerical_approx(pi, prec=200)
```

## Neki tipovi varijabli su promijenjeni

```
sage: a = 5
sage: type(a)
<type 'sage.rings.integer.Integer'>
```

```
sage: a = 5/3
sage: type(a)
<type 'sage.rings.rational.Rational'>
```

```
sage: a = 'hello'
sage: type(a)
<type 'str'>
```



## Rješavanje jednačbi

Ako izvršimo sljedeći kod (slično kao i u Sympy-ju)

```
x = var('x')
solve(x^2 + 3*x + 2, x)
```

za rješenje ćemo dobiti  $[x = (-2), x = (-1)]$ .

Analogno,

```
x, b, c = var('x b c')
solve([x^2 + b*x + c == 0], x)
```

nam daje  $\left[ x = -\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4c}, x = -\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 4c} \right]$ .

# Rješavanje jednadžbi

Sustav nelinearnih jednadžbi:

```
var('x y p q')
eq1 = p+q==9
eq2 = q*y+p*x==-6
eq3 = q*y^2+p*x^2==24
solve([eq1,eq2,eq3,p==1],p,q,x,y)
```

Rješenja su

$$\left[ p = 1, q = 8, x = -\frac{4}{3}\sqrt{10} - \frac{2}{3}, y = \frac{1}{6}\sqrt{10} - \frac{2}{3} \right],$$

$$\left[ p = 1, q = 8, x = \frac{4}{3}\sqrt{10} - \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{6}\sqrt{10} - \frac{2}{3} \right].$$

# Rješavanje jednađbi

Numeričko nalaženje rješenja:

```
sage: phi = var('phi')
sage: find_root(cos(phi)==sin(phi),0,pi/2)
0.785398163397
```

Rješavanje nejednađbi:

```
sage: solve(x^2+x-1 > 0, x)
[[x < -1/2*sqrt(5) - 1/2], [x > 1/2*sqrt(5) - 1/2]]
```

## Nalaženje korijena polinoma

```
sage: (x^3+2*x+1).roots(x)
```

Korijeni su

$$\left( -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{18} \sqrt{59} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} (i\sqrt{3} + 1) - \frac{i\sqrt{3} - 1}{3 \left( \frac{1}{18} \sqrt{59} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}}, 1 \right),$$

$$\left( -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{18} \sqrt{59} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} (-i\sqrt{3} + 1) - \frac{-i\sqrt{3} - 1}{3 \left( \frac{1}{18} \sqrt{59} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}}, 1 \right),$$

$$\left( \left( \frac{1}{18} \sqrt{59} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3 \left( \frac{1}{18} \sqrt{59} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}}, 1 \right).$$

## Nalaženje korijena polinoma II

```
sage: (x^3+2*x+1).roots(x, ring=RR)
```

daje  $[(-0.453397651516404, 1)]$ .

```
sage: (x^3+2*x+1).roots(x, ring=CC)
```

daje  $(-0.453397651516404, 1)$ ,  
 $(0.226698825758202 - 1.46771150871022i, 1)$ ,  
 $(0.226698825758202 + 1.46771150871022i, 1)$ .

# Deriviranje

```
sage: diff(sin(x^2), x, 4)
16*x^4*sin(x^2) - 48*x^2*cos(x^2) - 12*sin(x^2)
```

```
sage: x, y = var('x,y')
sage: f = x^2 + 17*y^2
sage: f.diff(y)
34*y
```

## Integriranje, parcijalni razlomci

```
sage: integral(x*sin(x^2), x)
-1/2*cos(x^2)
sage: integral(x/(x^2+1), x, 0, 1)
1/2*log(2)
```

Za numeričko integriranje postoji funkcija `integral_numerical`.

```
sage: f = 1/((1+x)*(x-1))
sage: f.partial_fraction(x)
-1/2/(x + 1) + 1/2/(x - 1)
```

# Pojednostavljivanje

```
sage: simplify(arccos(sin(pi/3)))
1/6*pi
sage: simplify(exp(i*pi/6))
1/2*sqrt(3) + 1/2*I
```

```
sage: a = var('a')
sage: y = cos(x+a) * (x+1)
sage: y.subs(a=-x)
x + 1
sage: y.subs(x=pi/2, a=pi/3)
-1/4*sqrt(3)*(pi + 2)
```



## Pojednostavljanje, simboličke funkcije

```
sage: y, z = var('y, z')
sage: f = x^3 + y^2 + z
sage: f.subs_expr(x^3 == y^2, z==1)
2*y^2 + 1
```

```
sage: f(x)=(2*x+1)^3
sage: f(-3)
-125
sage: f.expand()
x |--> 8*x^3 + 12*x^2 + 6*x + 1
```

```
sage: ((x+y+sin(x))^2).expand().collect(sin(x))
x^2 + 2*x*y + y^2 + 2*(x + y)*sin(x) + sin(x)^2
```

## Pojednostavljanje, simboličke funkcije

```
sage: u = sin(x) + x*cos(y)
sage: v = u.function(x, y)
sage: v
(x, y) |--> x*cos(y) + sin(x)
```

```
sage: f = (e^x-1) / (1+e^(x/2))
sage: f.simplify_exp()
e^(1/2*x) - 1
```

```
sage: f = cos(x)^6 + sin(x)^6 + 3 * sin(x)^2 * cos(x)^2
sage: f.simplify_trig()
1
```

# Pojednostavljivanje

```

sage: f = cos(x)^6
sage: f.reduce_trig()
1/32*cos(6*x) + 3/16*cos(4*x) + 15/32*cos(2*x) + 5/16
sage: f = sin(5 * x)
sage: f.expand_trig()
5*cos(x)^4*sin(x) - 10*cos(x)^2*sin(x)^3 + sin(x)^5
sage: n = var('n')
sage: f = factorial(n+1)/factorial(n)
sage: f.simplify_factorial()
n + 1
sage: f = sqrt(abs(x)^2)
sage: f.simplify_radical()
abs(x)

```

Ostale naredbe: `factor`, `factor_list`, `combine`, `simplify_full`, ...

## Uvjeti na varijable

```
sage: assume(x > 0)
None
sage: bool(sqrt(x^2) == x)
True
sage: forget(x > 0)
None
sage: bool(sqrt(x^2) == x)
False
sage: n = var('n')
sage: assume(n, 'integer')
None
sage: sin(n*pi).simplify()
0
```

## Rješavanje ODJ

```
sage: t = var('t')
sage: x = function('x',t)
sage: DE = diff(x, t) + x - 1
sage: desolve(DE, [x,t])
(_C + e^t)*e^(-t)
```

```
sage: x = var('x')
sage: y = function('y', x)
sage: desolve(diff(y,x,x) + x*diff(y,x) + y == 0, y,
             [0,0,1])
-1/2*I*sqrt(2)*sqrt(pi)*erf(1/2*I*sqrt(2)*x)*e^(-1/2*x^2)
```

# Sume, redovi

```

sage: k, n = var('k, n')
sage: sum(k, k, 1, n).factor()
1/2*(n + 1)*n
sage: sum(k * binomial(n, k), k, 0, n)
2^(n - 1)*n
sage: n, k, y = var('n, k, y')
sage: sum(binomial(n,k) * x^k * y^(n-k), k, 0, n)
(x + y)^n
sage: a, q, k, n = var('a, q, k, n')
sage: sum(a*q^k, k, 0, n)
(a*q^(n + 1) - a)/(q - 1)

```

# Sume, redovi

```
sage: a, q, k, n = var('a, q, k, n')
sage: sum(a*q^k, k, 0, n)
(a*q^(n + 1) - a)/(q - 1)
sage: assume(abs(q) < 1)
None
sage: sum(a*q^k, k, 0, infinity)
-a/(q - 1)
```

## Limesi

```

sage: limit((x**(1/3) - 2) / ((x + 19)**(1/3) - 3), x = 8)
9/4
sage: f(x) = (cos(pi/4-x)-tan(x))/(1-sin(pi/4 + x))
sage: limit(f(x), x = pi/4)
Infinity
sage: limit(f(x), x = pi/4, dir='minus')
+Infinity
sage: limit(f(x), x = pi/4, dir='plus')
-Infinity
sage: u(n) = n^100 / 100^n
sage: limit(u(n), n=infinity)
0

```



## Razvoj funkcije u red

```

sage: taylor((1+arctan(x))*(1/x), x, 0, 3)
1/16*x^3*e + 1/8*x^2*e - 1/2*x*e + e
sage: (ln(2*sin(x))).series(x==pi/6, 3)
(sqrt(3))*(-1/6*pi + x) + (-2)*(-1/6*pi + x)^2 + Order
(-1/216*(pi - 6*x)^3)
sage: (ln(2*sin(x))).series(x==pi/6, 3).truncate()
-1/18*(pi - 6*x)^2 - 1/6*sqrt(3)*(pi - 6*x)
sage: f = arctan(x).series(x, 10)
sage: f
1*x + (-1/3)*x^3 + 1/5*x^5 + (-1/7)*x^7 + 1/9*x^9 + Order(x
^10)
sage: (16*f.subs(x==1/5) - 4*f.subs(x==1/239)).n()
3.14159268240440

```

# SageTeX

Ovaj  $\LaTeX$  dokument je kreiran uz pomoć paketa SageTeX koji omogućava da u jednom dokumentu imamo kôd i za  $\LaTeX$  i za Sage.

Korištenje ovog paketa je automatizirano na Sagemath oblku, za korištenje na vlastitom računalu svakako je potrebno imati i  $\TeX$  distribuciju i Sage. Naredbe koje se koriste za ispisivanje i procesiranje Sage kôda su:

- `\sage`
- `\sageplot`
- `\sagestr`
- `\percent`

Okoline koje se koriste za ispisivanje i procesiranje Sage kôda su:

- `sageblock`
- `sagesilent`
- `sageverbatim`
- `comment`
- `sagecommandline`

# `\sage`, `sagestr`, `percent`

Rezultat naredbe

```
\sage{matrix ([[1, 2], [3,4]])^2}
```

je

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Naredba `\sagestr` je analogna naredbi `\sage`, samo što ne vraća L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X kôd.

Naredba `\percent` služi za unošenje znaka % u naredbe `\sage` i `\sageplot`.

# \sageplot

Naredba `\sageplot` služi za ubacivanje slika:

```
\sageplot[angle=30,width=8cm][png]{plot(sin(x), 0, pi), axes=False}
```



# sageblock

Tekst unutar okoline `sageblock` će biti ispisan te izvršen. Npr. kôd

```
\begin{sageblock}
  var('x')
  f(x) = sin(x) - 1
  g(x) = log(x)
  h(x) = diff(f(x) * g(x), x)
\end{sageblock}
```

će biti ispisan kao

```
var('x')
f(x) = sin(x) - 1
g(x) = log(x)
h(x) = diff(f(x) * g(x), x)
```

# sageblock, sagesilent, sageverbatim, comment

Nadalje, sljedeći će kôd

Vrijedi  $h(2) = \text{\sage{h(2)}}$ , gdje je  $h$  derivacija produkta funkcija  $f$  i  $g$ .

biti ispisan kao

Vrijedi  $h(2) = \cos(2) \log(2) + \frac{1}{2} \sin(2) - \frac{1}{2}$ , gdje je  $h$  derivacija produkta funkcija  $f$  i  $g$ .

Okolina **sagesilent** radi isto što i **sageblock**, ali ne ispisiše kôd. **sageverbatim** ispisiše kôd ali ga ne izvršava. **comment** niti ispisiše niti izvršava kôd te služi za upisivanje Sage komentara u L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X kôd.

# sagecommandline

Ovu naredbu ćemo ilustrirati primjerom: Sljedeći kôd

```
\begin{sagecommandline}
  sage: 1+1
  sage: factor(x^2 + 2*x + 1)
\end{sagecommandline}
```

ispisuje:

```
sage: 1+1
2
sage: factor(x^2 + 2*x + 1)
(x + 1)^2
```

## Zadaci za vježbanje

- Riješite sustav

$$x^2 = y^2, \quad x^3 = y^3 + 5.$$

- Izračunajte  $\int x^n dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Izračunajte  $\int_2^3 t^{20} e^t dt$  simbolički i numerički.
- Izračunajte gradijent od  $g(x, y) = xy + \sin x^2 + e^{-x}$ .
- Izračunajte  $(7!)!$ . Koliko znamenaka ima taj broj?
- Izračunajte  $\int_0^1 \int_0^y x e^{y^2} dx dy$ .
- Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x, \quad y(10) = 2, \quad \frac{dy}{dx}(10) = 1.$$

- Ubacite sva rješenja u PDF dokument koristeći SageTeX.