Geometría Analítica II

Tarea 5

Fecha de entrega: viernes 10 de Noviembre

Son todos los ejercicios de la sección **5.3** del libro

1. Demuestra que las clases de isometría de triángulos esféricos corresponden a las ternas $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ con $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, tales que $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$, donde α, β, γ son los lados.
2. Decimos que dos triángulos esféricos están en la misma familia si ambos se pueden dibujar con tres líneas esféricas. ¿Cómo se relacionan los lados de triángulos en una familia? Demuestra que las familias tienen 4, 2 o un sólo elemento, donde la de un sólo elemento es la de los triángulos de bases ortonormales.
3. Demuestra que si $\mathrm{d}_{\mathbb{S}^2}(u, v) = \pi/2$ entonces $\rho_{\pi,v} \circ \rho_{\pi,u} = \rho_{\pi,u\times v}$.
4. ¿Cuál es la matriz asociada a la rotación de $2\pi/3$ en el punto $1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$? Demuestra que es $\rho_{\pi/2,e_2} \circ \rho_{\pi/2,e_1}$. Observa que en las rotaciones de la esfera los ángulos de rotación no se suman al componer.
5. Demuestra que si una rotación manda a algún punto u en su antípoda entonces es una rotación de ángulo π con centro en un punto de la polar $u^\perp$.
6. Demuestra que si f es una rotación de ángulo α entonces $\alpha = \max\{\mathrm{d}_{\mathbb{S}^2}(x, f(x)) | x \in \mathbb{S}^2\}$.
7. Demuestra que la composición de dos reflexiones en líneas con un ángulo α es una rotación en la intersección de un ángulo 2α. Concluye que toda isometría puede escribirse como una composición de tres reflexiones a lo más.
8. Demuestra que la composición de tres reflexiones en líneas mutuamente ortogonales es la función antípoda.
9. Demuestra que para cualquier $A \in \mathfrak{O}(3)$ existen $B \in \mathfrak{O}(3)$ y $\alpha \in [0, 2\pi]$ tales que $BAB^\perp = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha & 0 \\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.