Дифференциальное уравнение:

$$x^2(y^2y''' - y'^3) = 2y^2y' - 3xyy'^2$$

Это уравнение однородное: если формально заменить в этом выражении $y \mapsto ky$, $y' \mapsto ky'$, $y'' \mapsto ky''$, то после сокращений получится то же самое уравнение.

Так как уравнение однородное, то сделаем замену $y'(x) = y(x) \cdot z(x)$.

Тогда

$$y''(x) = y'(x) \cdot z(x) + y(x) \cdot z'_x(x) = z^2(x)y(x) + y(x) \cdot z'_x(x)$$

$$y'''(x) = 2z(x) \cdot z'_x(x)y(x) + y'(x)z^2(x) + y'(x)z'_x(x) + y(x) \cdot z''_{xx}(x)$$

Подставим теперь полученные выражения:

$$x^2\left(y^2\left(2z \cdot z'y + y'z^2 + y'z' + y \cdot z''\right) - y^3z^3\right) = 2y^3z - 3xy^3z^2$$

$$x^2\left(y^2\left(2z \cdot z'y + y'z^2 + yzz' + y \cdot z''\right) - y^3z^3\right) = 2y^3z - 3xy^3z^2$$

$$x^2\left(y^2\left(2z \cdot z'y + yzz^2 + yzz' + y \cdot z''\right) - y^3z^3\right) = 2y^3z - 3xy^3z^2$$

$$x^2\left(2z \cdot z'y^3 + y^3z^3 + y^3zz' + y^3 \cdot z'' - y^3z^3\right) = 2y^3z - 3xy^3z^2$$

$$x^2\left(2z \cdot z'y^3 + y^3zz' + y^3 \cdot z''\right) = 2y^3z - 3xy^3z^2$$

Здесь мы сокращаем на y^3. Простой проверкой можно показать, что $y(x) \equiv 0$ есть решение исходного дифференциального уравнения, а значит можно спокойно сокращать, решение не теряется.

$$x^2\left(2z \cdot z' + zz' + z''\right) = 2z - 3xz^2$$

$$x^2\left(3zz' + z''\right) = 2z - 3xz^2$$

Мы можем проверить, является ли это уравнение квазиоднородным (обобщённо однородным). Если мы формально заменим $x \mapsto kx$, $z \mapsto k^m z$, $z' \mapsto k^{m-1} z'$, $z'' \mapsto k^{m-2} z''$ и удастся подобрать m так, чтобы после сокращений получилось исходное уравнение, то уравнение квазиоднородное. Посчитаем показатель степени k при каждом слагаемом:

$$3x^2 zz' \mapsto 2 + m + (m-1) = 2m + 1$$

$$x^2 z'' \mapsto 2 + (m-2) = m$$

$$2z \mapsto m$$

$$-3xz^2 \mapsto 1 + 2m$$

Отсюда получаем, что $m = -1$.

Сделаем замену: $x = e^t$, $\hat{z}(t) = q(t)e^{mt} = q(t)e^{-t}$

Сразу вычислим

$$\hat{z}'_t = e^{-t}(q'_t - q)$$

$$\hat{z}''_{tt} = e^{-t}(q''_{tt} - 2q'_t - q)$$

Так как t – новая независимая переменная, все старые производные надо выразить через неё.

Нам известно, что

$\hat{z}(t) = z(x(t))$ – потому что это одна и та же функция относительно t, просто записанная двумя разными способами

$\hat{z}'_t = z'_x \cdot x'_t$ отсюда $z'_x = \hat{z}'_t / x'_t = (q'_t\, e^{-t} - q\, e^{-t})/e^t = (q'_t - q)e^{-2t}$

$\hat{z}''_{tt} = (z'_x \cdot x'_t)'_t = z''_{xx} \cdot x'_t \cdot x'_t + z'_x \cdot x''_{tt}$ отсюда $z''_{xx} e^{2t} + z'_x e^t = \hat{z}''_{tt}$

затем

$z''_{xx} = e^{-2t} \hat{z}''_{tt} - z'_x \cdot e^{-t} = e^{-3t}(q''_{tt} - 2q'_t + q) - e^{-3t}(q'_t - q) = e^{-3t}(q''_{tt} - 3q'_t + 2q)$

Вычислим теперь отдельные слагаемые:

$$3zz'_x = 3 \cdot e^{-t} q(t) \cdot e^{-2t}(q'_t - q) = 3e^{-3t} q(q_t - q)$$

Подставим теперь всё в последнее дифференциальное уравнение

$$e^{2t}\left(e^{-3t}\Big(q''_{tt} - 3q'_t + 2q\Big) + 3e^{-3t} q(q'_t - q)\right) = 2e^{-t} q - 3e^t \cdot e^{-2t} q^2$$

$$q''_{tt} - 3q'_t + 2q + 3q(q'_t - q) = 2q - 3q^2$$

$$q''_{tt} - 3q'_t + 3qq'_t = 0$$

В это уравнение не входит независимая переменная t поэтому можно сделать замену:

$q'(t) = p(q(t))$

Тогда

$q''(t) = p'_q \cdot q'_t = p'_q p$

Подставим всё в последнее уравнение:

$$p'_q p - 3p + 3qp = 0$$

$$p(p'_q + 3q - 3) = 0$$

Есть два решения:

$p \equiv 0$ что то же самое что $q'(t) \equiv 0$ и решение есть $q(t) \equiv \text{const}$

или

$p'_q + 3q - 3 = 0$ – это уравнение с разделяющимися переменными