Racines complexes : une précision

- On s'intéresse aux solutions du sustème
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$
dans le cas où les deux valeurs propres de A sont complexes (forcément conjugées).
- Soient $\lambda = \alpha \pm i\beta$ les valeurs propres, et $\mathbf{u}$, $\overline{\mathbf{u}}$ des vecteurs propres correspondants, il s'agit d'élements de $\mathbb{C}^2$
- Dans cette situation on a deux (vecteurs) solutions
$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{u}e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^2 = \overline{\mathbf{u}}e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$
- Si on cherche des solutions réélles il faut considérer les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{x}^1$. Il faut noter que la fonction "partie réelle" n'est pas multiplicative, donc
$$\begin{aligned} Re(\mathbf{x}^1) = Re(\mathbf{u}e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)) &\neq Re(\mathbf{u})e^{\alpha t}Re(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ &= Re(\mathbf{u})e^{\alpha t}\cos\beta t \end{aligned}$$
- Écrivons $\mathbf{u} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$ où $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$, c'est à dire que $\mathbf{r} = Re(\mathbf{u})$ et $\mathbf{s} = Im(\mathbf{u})$. Ainsi
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= \mathbf{u}e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}(\mathbf{r} + i\mathbf{s})(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}\left[(\mathbf{r}\cos\beta t - \mathbf{s}\sin\beta t) + i(\mathbf{r}\sin\beta t + \mathbf{s}\cos\beta t)\right] \end{aligned}$$
Et les solutions qu'on cherche sont en fait
$$e^{\alpha t}(\mathbf{r}\cos\beta t - \mathbf{s}\sin\beta t) \quad \text{et} \quad e^{\alpha t}(\mathbf{r}\sin\beta t + \mathbf{s}\cos\beta t)$$